



## VORLESUNG I

- Textgrundlage 3, Webseite 4, Anmeldung 5, Tutorien 6, Logik-Sprechstunde 7, Klausur & Leistungspunkte 8, Modul Logik & Grundlagen 9
- Logik & Argumentation 11, PL1 16, Eigennamen 19, Prädikate 21, Klötzchenwelt & -sprache 24, Atomare Sätze 29, Allgemeine Sprachen erster Stufe 33, Funktionssymbole 35, Weitere Beispiele von PL1-Sprachen 39, Übungen 41

2

## TEXTGRUNDLAGE

- Jon BARWISE & John ETCHEMENDY, *Sprache, Beweis und Logik. Band I: Aussagen- und Prädikatenlogik*, Paderborn: Mentis 2005.
- Begleitende Software (Anschaffung optional): Jon BARWISE & John ETCHEMENDY, *Sprache, Beweis und Logik. CD-ROM*, Paderborn: Mentis Verlag 2006.

3

## WEBSEITE

- Die Folien zur Vorlesung finden Sie unter: [www.uni-bonn.de/www/IPHIL/Mitarbeiter/Bromand/Materialien.html](http://www.uni-bonn.de/www/IPHIL/Mitarbeiter/Bromand/Materialien.html)
- Dort finden Sie auch Musterlösungen zu ausgesuchten Übungsaufgaben. Die Lösungen sind mit einem Passwort geschützt.
- Weitere Lösungshinweise finden Sie auf der *Language, Proof and Logic*-Seite (Link auf der Vorlesungsseite).

4

## ANMELDUNG

- Zur Vorlesung und dem Tutorium müssen Sie sich auf elektronischem Wege anmelden!
- Die Nachmeldephase für diejenigen, die sich in der ersten und zweiten Anmeldephase aus technischen Gründen nicht anmelden konnten, ist am 3. und 4. Dezember. Siehe auch [www.uni-bonn.de/www/IPHIL.html](http://www.uni-bonn.de/www/IPHIL.html) unter „Allgemeine Hinweise zu den Lehrveranstaltungen des BA-Studiengangs“.

5

## TUTORIEN

- Begleitend zur Vorlesung werden zwei Tutorien angeboten, in denen die Übungsaufgaben besprochen, Vorlesungsinhalte vertieft und Fragen beantwortet werden:
  - *Tutorium 1:*  
Mi. 10–12, HS IX
  - *Tutorium 2:*  
Di. 8–10, Institut für Philosophie, Großer Übungsraum

6

### LOGIK-SPRECHSTUNDE

- *Logik-Sprechstunde:*  
Mo. 13–14, Institut für Philosophie, Raum 1.092. Hier besteht die Möglichkeit, auf individuelle Schwierigkeiten einzugehen, die im Rahmen der Tutorien nicht ausgeräumt werden konnten.
- *Allgemeine Sprechstunde:*  
Fr. 14–15 und nach Vereinbarung, Institut für Philosophie, Raum 1.092.

7

### KLAUSUR & LEISTUNGSPUNKTE

Für die Veranstaltung werden Leistungspunkte wie folgt vergeben:

- *Vorlesung:* 3 LP (regelmäßige Teilnahme)
- *Tutorium:* 3 LP (aktive Teilnahme = regelmäßiges Abgeben von Übungszetteln)
- *Klausur:* 1 LP (bei Bestehen); die Abschlussklausur findet statt am: 4. Februar 2009 (Termin der letzten Vorlesung).

8

### MODUL LOGIK & GRUNDLAGEN

- Das Modul *Logik & Grundlagen* besteht aus der Vorlesung *Einführung in die Logik* sowie einer weiteren Veranstaltung, die im Sommersemester angeboten wird.
- Dabei kann es sich um einen Logik-Kurs für Fortgeschrittene handeln, ein Seminar zur Geschichte der Logik, zu sog. philosophischen Logiken (Ergänzungen oder Alternativen zur klass. Logik), zur Sprachphilosophie oder zu Logik-nahen Texten (z.B. Frege, Wittgenstein).

9

- Die Abschlussklausur *des Moduls* (zum Ende des Sommersemesters) besteht je zur Hälfte aus Fragen zum Seminar im Sommersemester und Fragen zur Vorlesung.

10

### LOGIK & ARGUMENTATION

- In der Philosophie wie in vielen anderen Wissenschaften spielt das Argumentieren eine wesentliche Rolle.
- Um die Wahrheit einer Behauptung (der sog. *Konklusion* des Argumentes) zu stützen, werden dabei andere Behauptungen angeführt (die sog. *Prämissen* des Argumentes), welche die Konklusion stützen sollen.

11

- „Da also die Sittlichkeit einen Einfluss auf unsere Handlungen und Neigungen hat, ergibt sich, dass sie nicht aus der Vernunft allein hergeleitet werden kann. Denn die Vernunft allein kann, wie wir schon bewiesen haben, niemals einen solchen Einfluss haben.“

Aus: David Hume, *Treatise on Human Understanding*

12

- Die Wahrheit der Prämissen garantiert dabei die Wahrheit der Konklusion, wenn letztere aus den Prämissen *folgt*.
- Dabei *folgt* eine Behauptung B aus den Aussagen  $A_1, \dots, A_n$  genau dann, wenn es nicht möglich ist, dass  $A_1, \dots, A_n$  alle wahr sind, B aber falsch ist.
- Dies ist der klassische Begriff der *logischen Folgerung*, der bereits auf ARISTOTELES zurückgeht. Hauptanliegen der Logik ist die Klärung dieses Begriffs.

13

- Für umgangssprachliche Sätze ist es dabei nicht immer leicht festzustellen, ob eine gegebene Behauptung aus anderen Aussagen folgt.
- Daher greift man auf überschaubare *künstliche* bzw. sog. *formale* Sprachen zurück, in denen leichter festgestellt werden kann, ob ein Satz aus anderen folgt.

14

- Die Frage, ob eine umgangssprachliche Behauptung B aus anderen umgangssprachlichen Aussagen  $A_1, \dots, A_n$  folgt, kann dann indirekt in Angriff genommen werden:
- Die umgangssprachlichen Sätze werden zunächst in die formale Sprache übersetzt, in der dann festgestellt werden kann, ob die formalsprachliche Entsprechung von B aus den Übersetzungen von  $A_1, \dots, A_n$  folgt.

15

## PL1

---

- Unter *PL1* (Prädikatenlogik erster Stufe) versteht man eine Familie formaler bzw. künstlicher Sprachen. Diese Sprachen verfügen über ein sog. *nicht-logisches* Vokabular, mit dem die einfachsten Sätze dieser Sprachen, die sog. *atomaren Sätze*, gebildet werden.
- Mit atomaren Sätzen kann eine Eigenschaft von einem Objekt ausgesagt oder behauptet werden, dass eine Relation zwischen zwei oder mehreren Objekten besteht.

16

- PL1-Sprachen unterscheiden sich nur in ihrem nicht-logischen Vokabular. Allen PL1-Sprachen gemeinsam ist das sog. *logische Vokabular*, mit dem komplexe Sätze aus einfacheren Teilsätzen gebildet werden können.
- Im Folgenden beschäftigen wir uns zunächst nur mit dem nicht-logischen Vokabular.

17

- Das nicht-logische Vokabular einer PL1-Sprache setzt sich aus folgenden Bestandteilen zusammen (nicht jede PL1-Sprache muss allerdings über alle Ausdrucksarten verfügen):
- 1. *Terme*
  - (i) Eigennamen (Individuenkonstante)
  - (ii) Funktionsausdrücke
- 2. *Prädikate*

18

**EIGENNAMEN**

- *Eigennamen* bzw. *Individuenkonstanten* einer PL1-Sprache ähneln umgangssprachlichen Eigennamen: Sie bezeichnen einzelne Objekte.
- Im Gegensatz zur Umgangssprache gibt es im Rahmen von PL1-Sprachen jedoch keine Eigennamen (wie etwa *Pegasus*), die kein Objekt bezeichnen.

19

- Im Gegensatz zur Umgangssprache kommt in PL1-Sprachen auch kein mehrdeutiger Eigenname vor, der verschiedene Objekte benennt.
- Allerdings ist es im Rahmen von PL1-Sprachen möglich, dass ein Objekt verschiedene Eigennamen besitzt. Auch muss nicht jedes Objekt einen Namen tragen.

20

**PRÄDIKATE**

- Prädikate drücken Eigenschaften von einzelnen Objekten aus oder Relationen bzw. Beziehungen, die zwischen zwei oder mehreren Objekten bestehen.
- Prädikate entsprechen damit deutschen Ausdrücken wie *ist rot*, *läuft schnell*, *ist ein Flugzeug* und auch Ausdrücken wie *ist größer als*, *sind miteinander verheiratet*.

21

- Wie im Deutschen besitzen Prädikate einer PL1-Sprache eine bestimmte *Stelligkeit*. Damit bezeichnet man die Anzahl der Argumente, die man benötigt, um mit dem Prädikat einen vollständigen Satz bilden zu können.
- So sind etwa *ist rot*, *läuft schnell*, *ist ein Flugzeug* einstellig, *ist größer als*, *sind miteinander verheiratet* hingegen zweistellig.

22

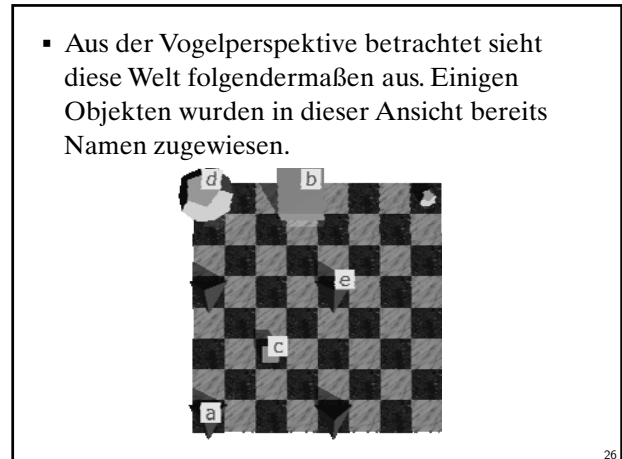
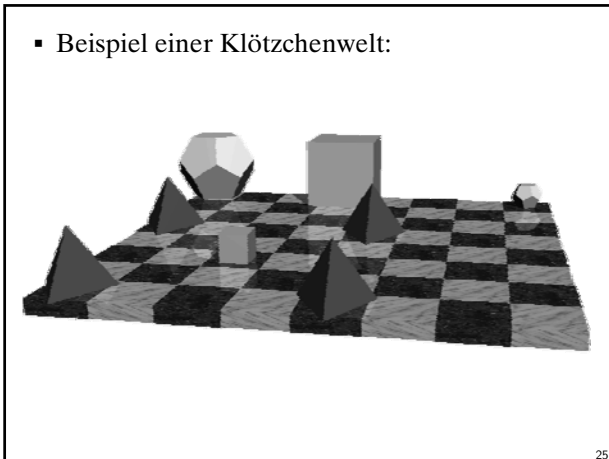
- Im Gegensatz zu den umgangssprachlichen Entsprechungen von Prädikaten sind Prädikate einer PL1-Sprache nicht *vage*. Vage Prädikate besitzen unscharfe Grenzen, so dass in bestimmten Grenzfällen nicht klar ist, ob das Prädikat noch auf den Fall zutrifft oder nicht.

23

**KLÖTZCHENWELT & -SPRACHE**

- Ein besonders einfaches Beispiel einer PL1-Sprache ist die *Klötzchensprache*, auf die wir zu Zwecken der Veranschaulichung immer wieder zurückkommen werden.
- Mit der Klötzchensprache beschreiben wir Spielzeug-, Welten'. Dabei handelt es sich um Schachbretter, auf denen Würfel, Tetraeder und Dodekaeder in drei Größen (groß – mittel – klein) vorzufinden sind:

24



- Tet(*a*)      *a* ist ein Tetraeder
  - Cube(*a*)     *a* ist ein Würfel
  - Dodec(*a*)    *a* ist ein Dodekaeder
  - Small(*a*)     *a* ist klein
  - Medium(*a*)   *a* ist mittelgroß
  - Large(*a*)     *a* ist groß
  - SameSize(*a*, *b*)    *a* ist genauso groß wie *b*
  - SameShape(*a*, *b*)   *a* hat dieselbe Form wie *b*
  - Larger(*a*, *b*)     *a* ist größer als *b*
  - Smaller(*a*, *b*)    *a* ist kleiner als *b*
- 27

- SameCol(*a*, *b*)    *a* ist in derselben Spalte wie *b*
  - SameRow(*a*, *b*)   *a* ist in derselben Zeile wie *b*
  - Adjoins(*a*, *b*)     *a* und *b* sind benachbart
  - LeftOf(*a*, *b*)     *a* ist ‚links von‘ *b*
  - RightOf(*a*, *b*)    *a* ist ‚rechts von‘ *b*
  - FrontOf(*a*, *b*)    *a* ist ‚vor‘ *b*
  - BackOf(*a*, *b*)     *a* ist ‚hinter‘ *b*
  - Between(*a*, *b*, *c*)  
*a*, *b* und *c* befinden sich in derselben Zeile, Spalte oder Diagonale, und *a* liegt zwischen *b* und *c*
- 28

- ### ATOMARE SÄTZE
- Die einfachsten Sätze einer PL1-Sprache heißen *atomare Sätze*. Sie setzen sich zusammen aus einem *n*-stelligen Prädikat und *n*-vielen Termen.
  - Zu den Sätzen der Klötzchensprache zählen so etwa die Folgenden:  
Tet(*a*); Smaller(*a*, *a*); Between(*a*, *b*, *c*)
  - Keine Sätze sind hingegen:  
Dodec(Dodec(*a*)); Smaller(*a*); Between(*a*, *b*)
- 29

- Bei der Notation von Sätzen ist die Reihenfolge entscheidend. Larger(*a*, *b*) besagt etwas völlig anderes als Larger(*b*, *a*).
  - Man verwendet in der Regel die sog. *Präfix-Notation*, d.h. man schreibt das Prädikat vor die (eingeklammerten und durch Kommata getrennten) Argumente: Between(*a*, *b*, *c*)
  - Im Falle des Identitätszeichens = verwendet man allerdings zumeist die sog. *Infix-Notation*, d.h. man schreibt = zwischen und nicht vor die Argumente—also *a = b* anstelle von *=(a, b)*.
- 30

- Mit einem atomaren Satz behauptet man, dass die fragliche Beziehung zwischen den benannten Objekten besteht bzw. dass das benannte Objekt die ausgedrückte Eigenschaft besitzt.
- Sätze sind wahr oder falsch, je nachdem, ob die durch das Prädikat ausgedrückte Beziehung zwischen den benannten Objekten besteht bzw. (im Falle eines einstelligen Prädikats) ob die ausgedrückte Eigenschaft auf das benannte Objekt zutrifft.

31

- Man sagt auch, ein wahrer Satz habe den *Wahrheitswert WAHR*, ein falscher den *Wahrheitswert FALSCH*.

32

### **ALLGEMEINE SPRACHEN ERSTER STUFE**

- Wenn wir philosophische Argumente in eine Sprache der PL1 übersetzen wollen, hilft uns die Klötzchensprache natürlich nicht weiter.
- In solchen Fällen müssen wir selbst geeignete Prädikate und Terme finden und somit eine neue PL1-Sprache entwickeln.
- Dabei dürfen wir beliebigen Objekten (in einem weiten Sinne des Wortes) Namen geben—etwa auch Zeitpunkten, Orten usw.

33

- Im Allgemeinen sollten möglichst wenig Prädikate neu eingeführt werden, so dass etwa bei der Übersetzung von *Hans ist größer als Peter* ein flexibleres Prädikat wie  $\text{GrößerAls}(x, y)$  einem eher unflexiblen Prädikat wie  $\text{GrößerAlsPeter}(x)$  vorzuziehen ist.
- Anderenfalls müsste bei der Übersetzung von *Max ist größer als Hans* ein weiteres Prädikat  $\text{GrößerAlsHans}(x)$  eingeführt werden.

34

### **FUNKTIONSSYMBOLE**

- In manchen PL1-Sprachen gibt es neben Eigennamen noch weitere, komplexe Terme, mit denen atomare Sätze gebildet werden können.
- Diese Terme werden mit Hilfe von *Funktionsausdrücken* wie *vater* oder *mutter* gebildet: So sind  $\text{vater}(\text{anne})$  und  $\text{mutter}(\text{max})$  die PL1-Entsprechungen der umgangssprachlichen Ausdrücke *der Vater von Anne* und *die Mutter von Max*.

35

- Wendet man einen (einstelligen) Funktionsausdruck auf einen Term an, ergibt sich ein neuer Term, der sich—wie Eigennamen auch—auf genau ein Objekt bezieht.
- Der (einstellige) Funktionsausdruck *vater* ist daher nicht mit dem (zweistelligen) Relationsausdruck *VaterVon* zu verwechseln.
- $\text{VaterVon}(\text{hans}, \text{anne})$  ist ein (wahrer oder falscher) Satz und kein Term, der auf ein Objekt referiert!

36

- Funktionsausdrücke können auf *beliebige* Terme (auch auf komplexe) angewendet werden. So bezieht sich etwa der Term  $\text{vater}(\text{vater}(\text{anne}))$  auf Annes Großvater väterlicherseits und  $\text{vater}(\text{mutter}(\text{anne}))$  auf Annes Großvater mütterlicherseits.
- Eine entsprechende Iterierung von Prädikaten ist demgegenüber nicht möglich:  $\text{VaterVon}(\text{VaterVon}(\text{hans}, \text{anne}))$  ist weder ein Term noch ein wohlgeformter Satz!

37

- Um Verwechslungen vorzubeugen, werden Namen und Funktionsausdrücke klein, Prädikate hingegen groß geschrieben.
- Neben den obigen einstelligen gibt es auch  $n$ -stellige Funktionsausdrücke, die auf  $n$ -viele Terme angewandt werden müssen, damit ein neuer Term resultiert.

38

### WEITERE BEISPIELE VON PL1-SPRACHEN

- Ein bekanntes Beispiel einer PL1-Sprache ist die Sprache der Mengentheorie. Diese verfügt über zwei zweistellige Prädikatsymbole, nämlich  $=$  und das Elementsymbol  $\in$ .
- Beide Symbole werden in Infix-Notation verwendet (also  $a \in b$  anstelle von  $\in(a, b)$ ).

39

- Ein weiteres Beispiel ist die Sprache der Arithmetik, mit der wir über natürliche Zahlen  $0, 1, 2, 3, \dots$  sprechen.
- Diese Sprache kann wie folgt spezifiziert werden: Sie verfügt über die zwei Namen  $0$  und  $1$ , die beiden zweistelligen Relationssymbole  $=$  und  $<$ , sowie über die beiden zweistelligen Funktionssymbole  $+$  und  $\times$ .
- Mit Hilfe dieses Vokabulars kann jede Zahl durch einen Term bezeichnet werden:  $0, 1, (1 + 1), ((1 + 1) + 1), (((1 + 1) + 1) + 1), \dots$

40

### ÜBUNGEN

- Bitte bis zur nächsten Sitzung vorbereiten: Kap. 2 *Die Logik atomarer Sätze* (Kap. 1 *Atomare Sätze* ggf. noch nachbereiten)!
- Bis zum Tutorium bitte folgende Aufgaben lösen und beim Tutor abgeben: 1.3, 1.4, 1.8, 1.9, 1.12, 1.16, 1.20, 1.22
- Lösen Sie 1.3 und 1.4 ohne Software; im Falle von 1.3 können Sie die gesuchte Welt mit einem  $8 \times 8$ -Raster darstellen (Vordruck auf der Internet-Seite der Vorlesung!).

41

- Empfehlenswert ist es (aber optional), zusätzlich noch folgende Aufgaben zu lösen: 1.17, 1.18, 1.19, 1.21
- Falls Sie über die Software verfügen, sollten Sie (ebenfalls optional!) auch die Aufgaben 1.1, 1.2 und 1.5 bearbeiten!

42



## VORLESUNG 2

- Argumente 3
- Gültige vs. korrekte Argumente 6
- Informelle Beweise 14
- Beweise mit anderen Prädikaten und Relationen 23
- Formale Beweise 29
- Wie man zeigt, dass etwas nicht folgt 36
- Konstruktion eines Beweises 39
- Übungen 41

2

## ARGUMENTE

- Ein *Argument* ist eine Folge von Aussagen, in der eine Aussage (die sog. *Konklusion*) aus anderen Aussagen (den sog. *Prämissen*) folgen oder durch diese zumindest gestützt werden soll.
- In der Umgangssprache werden Konklusionen von Argumenten häufig durch Wendungen wie *also, folglich, somit, demnach* und *infolgedessen* kenntlich gemacht.

3

- Wendungen wie *weil, immerhin, denn* und *schließlich* deuten demgegenüber oft auf Prämissen eines Argumentes hin.
- Im Rahmen dieses Kurses sollen Argumente der Übersichtlichkeit halber im sog. *Fitch-Format* notiert werden (nach dem Logiker Frederic FITCH). Dabei werden Prämissen und Konklusion graphisch durch einen kleinen horizontalen Strich, den sog. *Fitch-Balken* getrennt:

4

- Beispiel eines Argumentes im Fitch-Format:

Alle reichen Schauspieler sind gute Schauspieler.	
Brad Pitt ist ein reicher Schauspieler.	
Brad Pitt ist ein guter Schauspieler.	

5

## GÜLTIGE VS. KORREKTE ARGUMENTE

- Ein Argument wird als *logisch gültig* bezeichnet, wenn seine Konklusion aus den Prämissen *logisch folgt*, d.h. wenn es nicht möglich ist, dass die Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist.
- Gültig ist somit etwa das Argument:  
Alle Menschen sind sterblich. Sokrates ist ein Mensch. Also ist Sokrates sterblich.

6



- Im Rahmen der Klötzchensprache wäre etwa der Schluss von  $Cube(c)$  und  $c = b$  auf  $Cube(b)$  gültig.
- Nicht gültig ist hingegen das Argument:  
Lukrez ist ein Mensch. Schließlich ist Lukrez sterblich und alle Menschen sind sterblich.

7

- Im Falle von gültigen Argumenten ist nur entscheidend, dass die Konklusion wahr sein muss, *falls* die Prämissen wahr sind. Demnach spielt es keine Rolle, *ob* die Prämissen wahr sind. Somit handelt es sich auch beim Folgenden um ein gültiges Argument:
- Alle reichen Schauspieler sind gute Schauspieler. Brad Pitt ist ein reicher Schauspieler. Also muss er ein guter Schauspieler sein.

8

- Ist ein Argument gültig und sind auch seine Prämissen wahr, spricht man von einem *korrekten* bzw. *schlüssigen* Argument.
- Beim letzten Argument handelt es sich also zwar um ein *gültiges*, nicht aber um ein *korrektes* Argument.

9

- **Gültigkeit:** Ist es möglich, dass die Konklusion falsch ist, *falls* die Prämissen wahr sind?

Prämissen 1 Prämissen 2 ⋮ Prämissen $n$	}	Die Wahrheit der Prämissen wird vorausgesetzt.	↓
also —————		Frage: Ist dann auch die Konklusion wahr?	
Konklusion			

10

- **Korrektheit:** Ist das Argument gültig *und* sind zudem die Prämissen wahr?

Prämissen 1	←	
Prämissen 2	←	
⋮	⋮	
Prämissen $n$	←	
also —————		Frage: Ist das Argument gültig und sind die Prämissen wahr?
Konklusion		

11

- Um die Gültigkeit eines Argumentes bzw. das Vorliegen logischer Folgerung beurteilen zu können, ist es demnach nicht nötig zu wissen, ob die Prämissen wahr sind.

12

- In der Logik geht es in erster Linie um die Beurteilung der Gültigkeit von Argumenten. Mit der Beurteilung der Wahrheit von Prämissen wäre die Logik überfordert. Argumente finden sich nämlich in allen Bereichen rationaler oder wissenschaftlicher Diskurse:
- Es ist nicht Aufgabe der Logik im Falle historischer Argumentationen historische Probleme zu lösen oder im Falle biologischer Argumentationen biologische Probleme zu lösen.

13

## INFORMELLE BEWEISE

- Dass ein Argument logisch gültig ist oder eine Aussage aus anderen folgt, können wir zeigen, indem wir einen *Beweis* führen.

14

- Ein *Beweis* ist eine schrittweise Herleitung der Konklusion aus den Prämissen. Dabei leiten wir Zwischenschritte her, von denen klar ist, dass sie aus den Prämissen und den evtl. bereits hergeleiteten Zwischenschritten folgen. Der Beweis ist abgeschlossen, wenn wir die Konklusion als offenkundige Folgerung aus den Prämissen und den Zwischenschritten hergeleitet haben.

15

- Von den Zwischenschritten wird dabei verlangt, dass sie garantieren, dass die in ihnen hergeleiteten Aussagen aus den Prämissen und den evtl. bereits hergeleiteten Zwischenschritten folgen.
- Beweise können *informell* oder *formal* im Rahmen eines sog. *deduktiven Systems* geführt werden. Ein deduktives System verfügt über einen genau festgelegten Bestand von Regeln, durch die es möglich ist, mechanisch zu überprüfen, ob ein Schritt in einem Beweis akzeptabel ist.

16

- Dabei unterscheiden sich formale und informelle Beweise lediglich hinsichtlich ihres *Stils*, nicht in Hinblick auf die geforderte *Striktheit* der Beweisführung.
- Nach dem Obigen sind in einem formalen oder informellen Beweis solche Schritte akzeptabel, die garantieren, dass der hergeleitete Satz wahr ist, wenn die vorausgesetzten Sätze wahr sind.

17

- Die informellen Beweismethoden bzw. formalen Ableitungsregeln, die Gegenstand des Logik-Kurses sind, werden daher wie folgt rechtfertigt: Man zeigt, dass aufgrund der Bedeutung bestimmter Ausdrücke die hergeleiteten Sätze nicht falsch sein können, wenn die vorausgesetzten Sätze wahr sind.
- Bei den fraglichen Ausdrücken handelt es sich um das logische Vokabular, das allen PL1-Sprachen gemeinsam ist. Der erste Ausdruck des logischen Vokabulars, der hier betrachtet werden soll, ist =.

18

- Ein Satz der Form  $c = b$  ist wahr, wenn die Terme  $c$  und  $b$  auf dasselbe Objekt referieren. Aufgrund der Bedeutung von  $=$  kann somit die erste informelle Beweismethode gerechtfertigt werden, die unter den Bezeichnungen *Ununterscheidbarkeit von Identischem* oder kurz *Substitution* bekannt ist:
- Wenn  $b = c$  gilt und  $b$  eine Eigenschaft besitzt (oder zu Objekten in einer bestimmten Beziehung steht), dann besitzt auch  $c$  die fragliche Eigenschaft (oder steht in der fraglichen Beziehung zu den besagten Objekten).

19

- Aufgrund der Bedeutung von  $=$  ergibt sich ein weiteres wichtiges Beweisprinzip, das als *Reflexivität der Identität* bezeichnet wird: Ein Satz der Form  $a = a$  darf stets in einen Beweis eingeführt werden; er kann aufgrund der Bedeutung von  $=$  nicht falsch sein.

20

- Mit diesen beiden Beweisprinzipien können weitere hergeleitet werden:
- *Symmetrie der Identität*: Wenn  $b = c$ , dann auch  $c = b$ .
- *Transitivität der Identität*: Wenn  $a = b$  und  $b = c$ , dann auch  $a = c$ .

21

- Das Prinzip der Symmetrie kann mit Hilfe des Substitutionsprinzips und der Reflexivität der Identität informell etwa wie folgt bewiesen werden:
- *Beweis*: Angenommen es gilt  $b = c$ . Wegen der Reflexivität der Identität gilt:  $b = b$ . Somit besitzt  $b$  die Eigenschaft, identisch mit  $b$  zu sein. Aufgrund des Substitutionsprinzips besitzt auch  $c$  diese Eigenschaft, d.h. wir dürfen in  $b = b$  das erste Vorkommen von  $b$  durch  $c$  ersetzen, weshalb  $c = b$  gilt.

22

### **BEWEISE MIT ANDEREN PRÄDIKATEN UND RELATIONEN**

- Folgerungsbeziehungen können zwischen Sätzen auch bestehen aufgrund deren nicht-logischem Vokabular. Wie die Identitätsrelation ist auch die Relation *größer als* (bzw. *Larger*) transitiv. Daher folgt aus  $\text{Larger}(a, b)$  und  $\text{Larger}(b, c)$  der Satz  $\text{Larger}(a, c)$ .
- Auch die Relation *kleiner als* ist transitiv.

23

- Andere Beispiele für symmetrische und reflexive Relationen neben  $=$  sind etwa: *ist genau so alt wie*, *ist genau so groß wie*, *befindet sich in derselben Zeile wie* usw.
- Somit folgt etwa aus  $\text{SameRow}(a, b)$  der Satz  $\text{SameRow}(b, a)$ .

24

- Weiterhin können Folgerungsbeziehungen bestehen zwischen Sätzen, die Relationsausdrücke enthalten, die sog. *inverse Relationen* ausdrücken; etwa bilden *größer als* und *kleiner als* ein Paar inverser Relationen. In solchen Fällen folgt aus  $\text{Larger}(a, b)$  etwa der Satz  $\text{Smaller}(b, a)$ .

25

- Da man nicht für alle Prädikats- und Relationssymbole die zulässigen Schlussregeln auflisten kann, beschränkt man sich im Rahmen der Logik zumeist auf die Beschreibung der Folgerungsbeziehungen, die zwischen Sätzen bestehen aufgrund deren logischem Vokabular. Diese Folgerungen werden wir als *PL1-Folgerungen* bezeichnen (mehr dazu später).

26

- Bei den in obigen Folgerungsbeziehungen zwischen atomaren Sätzen (ohne  $=$ ) handelt es sich um sog. *analytische Folgerungen* (im Englischen abgekürzt durch **AnaCon**).

27

- Den Unterschied zwischen *PL1-Folgerung* und *analytischer Folgerung* werden wir später genauer betrachten.
- Während PL1-Folgerungsbeziehungen zwischen Sätzen bestehen nur aufgrund der Bedeutung des in ihnen vorkommenden logischen Vokabulars, können analytische Folgerungsbeziehungen zwischen Sätzen bestehen auch aufgrund der Bedeutung des in ihnen vorkommenden nicht-logischen Vokabulars.

28

**FORMALE BEWEISE**

- Beweise lassen sich übersichtlicher in einem formalen deduktiven System führen. Das im Folgenden vorgestellte System  $\mathcal{F}$  geht auch auf den Logiker Frederic FITCH zurück.
- In  $\mathcal{F}$  sieht ein Beweis einem Argument im Fitch-Stil sehr ähnlich, allerdings werden auch noch alle Zwischenschritte mit Begründung aufgelistet, die wir herleiten, um zur Konklusion zu gelangen:

29

- Form eines Beweises in  $\mathcal{F}$ :

P	
Q	
R	
S <sub>1</sub>	Begründung 1
⋮	⋮
S <sub>n</sub>	Begründung n
S	Begründung n + 1

30

▪ Im Rahmen von  $\mathcal{F}$  gibt es formale Regeln, die den informellen Beweisprinzipien der Substitution und der Reflexivität der Identität entsprechen. Dem Substitutionsprinzip entspricht die Regel der *Identitäts-Beseitigung* (kurz: = **Elim**), der Reflexivität der Identität entspricht die Regel der *Identitäts-Einführung* (= **Intro**).

31

▪ **Identitäts-Einführung (= Intro):**  
 $\triangleright \mid n = n$

▪ **Identitäts-Beseitigung (= Elim):**

$$\begin{array}{l} \mid P(n) \\ \mid \vdots \\ \mid n = m \\ \mid \vdots \\ \triangleright \mid P(m) \end{array}$$

32

▪ Im Allgemeinen werden wir zu jedem neuen Ausdruck des logischen Vokabulars, den wir demnächst kennen lernen werden, jeweils eine Einführungs-Regel sowie eine Beseitigungs-Regel einführen.

▪ Eine Ausnahme bildet die (eigentlich überflüssige) Reiterations-Regel (**Reit**):

$$\begin{array}{l} \mid P \\ \mid \vdots \\ \triangleright \mid P \end{array}$$

33

▪ Der bereits informell geführte Beweis der Symmetrie der Identität kann somit in  $\mathcal{F}$  wie folgt geführt werden:

$$\begin{array}{l} \mid 1. a = b \\ \mid 2. a = a \quad = \text{Intro} \\ \mid 3. b = a \quad = \text{Elim: 2, 1} \end{array}$$

34

**WIE MAN ZEIGT,  
DASS ETWAS NICHT FOLGT**

▪ Die bisher betrachteten Beweise zeigten stets, dass ein Argument gültig ist bzw. dass die jeweilige Konklusion aus den Prämissen folgt. Solche Beweise sollen im Folgenden *Folgerungsbeweise* genannt werden.

▪ Wie zeigt man aber, dass ein Argument *ungültig* ist bzw. dass seine Konklusion *nicht* aus den Prämissen folgt?

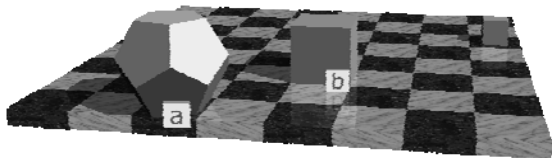
35

▪ Folgt eine Konklusion *nicht* aus bestimmten Prämissen, ist es möglich, dass die Prämissen wahr sind, die Konklusion aber falsch ist. Dass dies möglich ist, kann mit Hilfe eines *Gegenbeispiels* gezeigt werden.

▪ Ein solcher Beweis durch Aufzeigen eines Gegenbeispiels wird auch *Beweis des Nicht-Folgens* genannt.

36

- So zeigt die folgende Klötzchenwelt, dass aus  $\text{Larger}(a, b)$  und  $\text{Large}(a)$  nicht  $\text{Small}(b)$  folgt:



- Die obige Klötzchenwelt zeigt eine mögliche Situation, in der  $\text{Larger}(a, b)$  und  $\text{Large}(a)$  wahr sind,  $\text{Small}(b)$  aber falsch ist:  $b$  ist nicht klein, sondern mittelgroß!

37

### KONSTRUKTION EINES BEWEISES

- $\left. \begin{array}{l} 1. \text{ SameRow}(a, a) \\ 2. b = a \\ \vdots \\ ?. \text{ SameRow}(b, a) \end{array} \right\}$

38

- $\left. \begin{array}{l} 1. \text{ SameRow}(a, a) \\ 2. b = a \\ \vdots \\ ?. a = b \\ ?. \text{ SameRow}(b, a) \end{array} \right\} = \text{Elim: } 1, ?$

- $\left. \begin{array}{l} 1. \text{ SameRow}(a, a) \\ 2. b = a \\ 3. b = b \\ 4. a = b \\ 5. \text{ SameRow}(b, a) \end{array} \right\} \begin{array}{l} = \text{Intro} \\ = \text{Elim: } 3, 2 \\ = \text{Elim: } 1, 4 \end{array}$

39

### ÜBUNGEN

- Bitte bis zur nächsten Sitzung vorbereiten: Kap. 3 *Die Booleschen Junktoren!*
- Bis zum Tutorium bitte folgende Aufgaben auf Papier lösen und beim Tutor abgeben: 2.2, 2.4, 2.5, 2.7, 2.9, 2.10, 2.22, 2.25 (*optional* könnten Sie auch noch Aufgabe 2.23 lösen!)
- Falls Sie über die Software verfügen, sollten Sie (ebenfalls *optional!*) auch die Aufgaben 2.15, 2.26 und 2.21 bearbeiten!

40



### VORLESUNG 3

- Boolesche Junktoren 3
- Negation 8
- Konjunktion 12
- Disjunktion 17
- Junktoren und Spielregeln 24
- Mehrdeutigkeit und Klammern 30
- Äquivalente Ausdrucksweisen 36
- Übersetzung 39
- Übungen 44

2

### BOOLESCHE JUNKTOREN

- Bisher haben wir vom logischen Vokabular, für das wir Beweisregeln angeben werden, nur = kennen gelernt.
- Die Beweisregeln erlauben, logische Folgerungen aufzuzeigen, die sich aus der Bedeutung von = ergeben.

3

- Zum logischen Vokabular zählen aber auch sog. *Junktoren* und *Quantoren*, mit denen komplexere Sätze aus einfacheren Bestandteilen aufgebaut werden können.
- Im Folgenden wird es zunächst um die *Junktoren* gehen. Bevor wir Beweisregeln für diese angeben können, müssen wir uns wie im Falle von = erst über deren Bedeutung klar werden.

4

- Zunächst wird es um die sog. *Booleschen Junktoren* gehen (die nach dem Logiker George BOOLE benannt sind).
- Dabei handelt es sich um die Ausdrücke  $\wedge$ ,  $\vee$  und  $\neg$ , die (in etwa) den deutschen Ausdrücken *und*, *oder* und *nicht* entsprechen. Wie im Deutschen dienen diese Junktoren dazu, komplexere Aussagen aus einfacheren aufzubauen.

5

- Im Falle der PL1-Sprache ergibt sich dabei (ähnlich wie auch im Deutschen) der Wahrheitswert einer Aussage, die mit einem solchen Junktoren aufgebaut wurde, *funktional* aus den Wahrheitswerten der Teilaussagen; daher spricht man auch von *wahrheitsfunktionalen Junktoren*.

6

- Ein Beispiel eines *nicht* wahrheitsfunktionalen Junktors ist etwa „weil“. So kann beispielsweise der Satz  
*Hans schlief ein, weil er 24 Stunden gearbeitet hatte.*  
wahr oder falsch sein, selbst wenn die beiden Teilsätze *Hans schlief ein* sowie *Hans hatte 24 Stunden gearbeitet* wahr sind.

### NEGATION

- Mit dem Symbol  $\neg$  soll im Rahmen unserer PL1-Sprache die Negation ausgedrückt werden, die wir im Deutschen durch Ausdrücke wie *nicht, es ist nicht der Fall, dass ...* oder das Präfix *un-* ausdrücken.

- Im Gegensatz zum deutschen *nicht* wird  $\neg$  aber nur als *Satznegation* verwendet. Im Deutschen kann demgegenüber die Negation auch auf *Satzteile* angewandt werden wie etwa in:  
*John aber nicht Mary ist zu Hause.*
- Ist P ein Satz unserer PL1-Sprache, ist somit auch  $\neg P$  ein Satz unserer Sprache. Im Falle einer Identitätsbehauptung  $a = b$  schreibt man allerdings nicht  $\neg(a = b)$ , sondern  $a \neq b$ .

- Die *Bedeutung* von  $\neg$  kann mit einer sog. *Wahrheitstafel* wiedergegeben werden:

P	$\neg P$
WAHR	FALSCH
FALSCH	WAHR

- Wie im Falle von  $=$  ergeben sich aufgrund der Bedeutung von  $\neg$  logisch gültige Schlussfolgerungen. So ist etwa klar, dass  $\neg\neg P$  nicht falsch sein kann, falls P wahr ist (demnach folgt also  $\neg\neg P$  logisch aus P—und umgekehrt).

- $\neg\neg P$  wird dabei als *doppelte Negation* bezeichnet. Sie ist im Rahmen unserer PL1-Sprache genau dann wahr, wenn auch P wahr ist.
- Im Rahmen der Umgangssprache ist das meistens—aber nicht immer—so. Im Satz  
*Nichts Genaues weiß man nicht.*  
hebt die zweite Negation nicht die erste auf, sondern *betont* diese eher!
- Atomare Aussagen sowie (einfach) negierte atomare Aussagen sollen im Folgenden auch *Literale* genannt werden.

### KONJUNKTION

- Mit dem Symbol  $\wedge$  soll im Rahmen unserer PL1-Sprache die Konjunktion ausgedrückt werden, die wir im Deutschen durch Ausdrücke wie *und, außerdem, zudem* oder *aber* ausdrücken.



- Im Gegensatz zum deutschen *und* wird  $\wedge$  aber nur als *Satzverknüpfung* verwendet. Im Deutschen können demgegenüber mit *und* auch *Satzteile* verknüpft werden wie etwa in:  
*John und Mary sind zu Hause.*  
*John rutschte aus und fiel hin.*
- Im Rahmen einer PL1-Sprache können solche Konjunktionen folgendermaßen wiedergegeben werden:  
 $Zuhause(john) \wedge Zuhause(mary)$   
 $Rutsche(john) \wedge Fiel(john)$

13

- Sind P und Q Sätze unserer PL1-Sprache, ist auch  $P \wedge Q$  ein Satz unserer Sprache (bei P und Q darf es sich dabei auch um komplexe Sätze handeln).
- Die Teilsätze P und Q einer Konjunktion  $P \wedge Q$  werden auch *Konjunkte* genannt.

14

- Die *Bedeutung* von  $\wedge$  kann mit der folgenden Wahrheitstafel wiedergegeben werden:

P	Q	$P \wedge Q$
WAHR	WAHR	WAHR
WAHR	FALSCH	FALSCH
FALSCH	WAHR	FALSCH
FALSCH	FALSCH	FALSCH

15

- Aufgrund der Wahrheitstafel ist etwa klar, dass aus  $P \wedge Q$  der Satz  $Q \wedge P$  folgt—und umgekehrt. Dies scheint im Deutschen nicht immer so zu sein; man vergleiche etwa die Sätze:  
*Sie zog die Jacke an und ging aus dem Haus.*  
*Sie ging aus dem Haus und zog die Jacke an.*
- *und* scheint demnach im Deutschen—im Gegensatz zu  $\wedge$ —gelegentlich so verwendet zu werden wie *und dann* (mehr dazu später).

16

### DISJUNKTION

---

- Mit dem Symbol  $\vee$  soll im Rahmen unserer PL1-Sprache die Disjunktion ausgedrückt werden, die wir im Deutschen durch den Ausdruck *oder* ausdrücken.

17

- Im Gegensatz zum deutschen *oder* wird  $\vee$  wie  $\wedge$  nur als *Satzverknüpfung* verwendet. Im Deutschen können demgegenüber mit *oder* auch *Satzteile* verknüpft werden wie etwa in:  
*John oder Mary ist zu Hause.*  
*John ist Pilot oder Copilot.*
- Im Rahmen einer PL1-Sprache können diese Disjunktionen folgendermaßen wiedergegeben werden:  
 $Zuhause(john) \vee Zuhause(mary)$   
 $Pilot(john) \vee Copilot(john)$

18

- Sind P und Q Sätze unserer PL1-Sprache, ist auch  $P \vee Q$  ein Satz unserer Sprache (bei P und Q darf es sich dabei auch um komplexe Sätze handeln).
- Die Teilsätze P und Q einer Disjunktion  $P \vee Q$  werden auch *Disjunkte* genannt.

19

- Die *Bedeutung* von  $\vee$  kann mit der folgenden Wahrheitstafel wiedergegeben werden:

P	Q	$P \vee Q$
WAHR	WAHR	WAHR
WAHR	FALSCH	WAHR
FALSCH	WAHR	WAHR
FALSCH	FALSCH	FALSCH

- Aufgrund der Wahrheitstafel ist etwa klar, dass aus P der Satz  $P \vee Q$  folgt.

20

- *Oder* wird im Deutschen nicht nur im obigen *einschließenden* Sinne, sondern auch im sog. *ausschließenden* Sinne gebraucht, in dem wir auch *entweder ... oder ...* verwenden.
- Im ausschließenden Sinne verstanden, wird mit der Disjunktion *entweder P oder Q* nicht nur ausgeschlossen, dass sowohl P als auch Q falsch sind (wie im einschließenden Sinne), sondern auch noch, dass beide *wahr* sind—mit *entweder P oder Q* meint man somit, dass einer und nur einer der Sätze P und Q wahr ist.

21

- Auch wenn  $\vee$  das einschließende Oder ausdrückt, kann das ausschließende Oder im Rahmen einer PL1-Sprache ausgedrückt werden. *Entweder P oder Q* kann dabei wie folgt ausgedrückt werden:

$$(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

22

- Ein weiterer Junktor des Deutschen, für den wir keine eigene prädikatenlogische Entsprechung haben, den wir aber dennoch im Rahmen von PL1-Sprachen ausdrücken können, ist *weder P noch Q*. Letzteres kann wie folgt ausgedrückt werden:

$$\neg(P \vee Q)$$

23

## JUNKTOREN & SPIELREGELN

- Die Bedeutungen von Junktoren kann man sich auch mit Hilfe des sog. *Henkin-Hintikka-Spiels* klar machen. Im Rahmen dieses Spiels streiten sich zwei Personen über den Wahrheitswert eines komplexen Satzes (etwa über die Klötzchenwelt). Die beiden Spieler fordern sich dann gegenseitig dazu auf, ihre Behauptungen durch Aussagen über den Wahrheitswert einer einfacheren Teilaussage des umstrittenen Satzes zu rechtfertigen.

24

- Das Spiel schreitet fort, bis die Spieler bei Behauptungen über die Wahrheitswerte von atomaren Sätzen angelangt sind, die sie durch einen Blick auf die gegebene Klötzchenwelt entscheiden können.

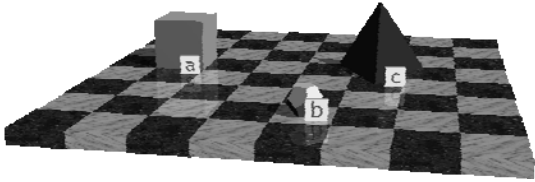
25

FORM	ENTSCHEIDUNG VON SPIELER 1	SPIELER AM ZUG	ZIEL
$P \vee Q$	WAHR	Spieler 1	Wähle einen wahren Satz von P, Q
	FALSCH	Spieler 2	
$P \wedge Q$	WAHR	Spieler 2	Wähle einen falschen Satz von P, Q
	FALSCH	Spieler 1	
$\neg P$	in jedem Fall	—	Ersetze $\neg P$ durch P; kehre Ent. um

26

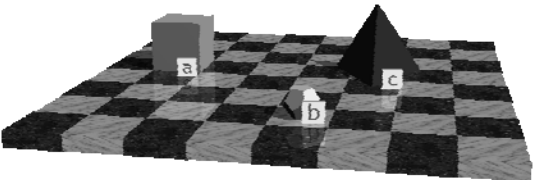
- Entscheidet sich Spielerin 1 für die Wahrheit von  $P \vee Q$ , ist sie verpflichtet, einen wahren Teilsatz anzuführen. Entscheidet sie sich für die Falschheit von  $P \vee Q$ , ist sie verpflichtet, die Falschheit beider Teilsätze zu behaupten, so dass Ihr Gegner, Spieler 2, sie mit einem dieser Teilsätze konfrontieren kann.

27



- Spieler 1 behauptet die Wahrheit von:  
 $\neg(\text{Cube}(a) \vee \text{Cube}(b)) \wedge \text{Large}(c)$
- Spieler 2 versucht, ein falsches Konjunkt zu wählen:  $\neg(\text{Cube}(a) \vee \text{Cube}(b))$

28



- Spieler 1 ist verpflichtet, die Wahrheit dieses Teilsatzes zu behaupten und somit die Falschheit von:  $\text{Cube}(a) \vee \text{Cube}(b)$
- Spieler 2 versucht, ein wahres Disjunkt zu wählen:  $\text{Cube}(a)$
- Spieler 2 gewinnt:  $\text{Cube}(a)$  ist wahr!

29

### MEHRDEUTIGKEIT & KLAMMERN

- Im Rahmen natürlicher Sprachen sind Aussagen mit mehreren Junktoren oft mehrdeutig. Diese Mehrdeutigkeiten sollen im Rahmen von PL1-Sprachen durch Klammern vermieden werden. So könnte der Satz  
*Max ist zu Hause oder Claire ist zu Hause und Carl ist glücklich.*  
zweierlei bedeuten:

30

- *Max ist zu Hause oder Claire ist zu Hause und Carl ist glücklich.*
- $\text{Zuhause}(\text{max}) \vee (\text{Zuhause}(\text{claire}) \wedge \text{Glücklich}(\text{carl}))$
- $(\text{Zuhause}(\text{max}) \vee \text{Zuhause}(\text{claire})) \wedge \text{Glücklich}(\text{carl})$

31

- Klammern werden also in einigen Fällen gebraucht, um Sätzen einen eindeutigen Sinn zu verleihen. Dem entspricht der Gebrauch von Klammern in der Mathematik:

$$2 + (5 \times 3) \neq (2 + 5) \times 3$$

32

- Klammern werden ebenfalls benötigt, um zu klären, auf welchen Teil eines Satzes sich ein im Satz vorkommendes Negationszeichen beziehen soll bzw. wie weit der *Skopus* (der Wirkungsbereich) des Negationszeichens ist:
- Beispielsweise besagt  $\neg P \wedge Q$  in der Regel etwas anderes als  $\neg(P \wedge Q)$ .

33

- Klammern dürfen allerdings weggelassen werden, wenn nicht die Gefahr von Mehrdeutigkeiten besteht. Insbesondere dürfen wir die äußersten Klammern etwa von  $((P \wedge Q) \wedge R)$  weglassen wie in  $(P \wedge Q) \wedge R$ .
- Letzteres besagt aber zudem dasselbe wie  $P \wedge (Q \wedge R)$ . Da es in *diesem* Fall also nicht zu Verwechslungen kommen kann, können wir auch einfach schreiben:  $P \wedge Q \wedge R$ .
- Entsprechendes gilt für  $P \vee Q \vee R$ .

34

- Wichtig sind Klammern aber in Fällen wie  $(P \wedge Q) \vee R$  oder  $(P \vee Q) \wedge R$ , in denen Konjunktionen bzw. Disjunktionen durch andere Junktoren verknüpft werden.
- In der Umgangssprache legen oftmals bestimmte Wendungen wie *entweder ... oder* und *sowohl ... als auch* bestimmte Klammern nahe.

35

### ÄQUIVALENTE AUSDRUCKSWEISEN

- Im Rahmen von PL1-Sprachen kann ein und derselbe Sachverhalt auf verschiedene Weisen ausgedrückt werden. So machen beispielsweise  $\text{RightOf}(a, b)$  und  $\text{LeftOf}(b, a)$  dieselbe Aussage.

36

- Im Folgenden schreiben wir  $S_1 \Leftrightarrow S_2$ , um auszudrücken, dass  $S_1$  und  $S_2$  unter denselben Bedingungen wahr bzw. falsch sind. Gilt  $S_1 \Leftrightarrow S_2$ , kann die mit  $S_1$  gemachte Behauptung ebenso gut mit  $S_2$  gemacht werden. Wie wir bereits gezeigt haben, gilt:
  - $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
  - $\neg\neg P \Leftrightarrow P$

37

- Besonders wichtig sind auch die folgenden, unter der Bezeichnung *de Morgansche Gesetze* bekannten Äquivalenzen:
  - $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
  - $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$

38

## ÜBERSETZUNG

- Die obigen Überlegungen zeigen, dass es stets mehrere Möglichkeiten gibt, einen umgangssprachlichen Satz in eine PL1-Sprache zu übersetzen.

39

- Von einer guten Übersetzung wird dabei erwartet, dass sie dieselbe Bedeutung besitzt wie der übersetzte Satz. Die Bedeutung eines Satzes wird dabei mit seinen *Wahrheitsbedingungen* identifiziert—also den Bedingungen, unter denen der fragliche Satz wahr ist.
- Im Rahmen unserer Klötzchensprache bedeutet dies, dass zwei gleichbedeutende Sätze in *jeder* Klötzchenwelt denselben Wahrheitswert besitzen.

40

- In stilistischer Hinsicht ist es zudem wünschenswert, dass auch die bei der Übersetzung verwendeten Junktoren denen im Ausgangssatz entsprechen. In stilistischer Hinsicht ist so

$$\neg(\text{Zuhause}(\text{claire}) \wedge \text{Zuhause}(\text{max}))$$

eine bessere Übersetzung von

*Es ist nicht wahr, dass sowohl Claire als auch Max zu Hause sind.*

als der zum obigen (aufgrund der de Morganschen Gesetze) äquivalente Satz

$$\neg\text{Zuhause}(\text{claire}) \vee \neg\text{Zuhause}(\text{max})$$

41

- Umgangssprachliche Sätze verfügen häufig über stilistische Merkmale, die mit den Wahrheitsbedingungen des Satzes nichts zu tun haben. So besitzt etwa

*Hans ist reich aber unglücklich.*

dieselben Wahrheitsbedingungen wie

*Hans ist reich und unglücklich.*

42

- Allerdings legt der erste Satz (mit *aber*) zudem nahe, dass es zumindest etwas überraschend ist, dass jemand, der reich ist, zugleich auch unglücklich ist. Solche Andeutungen können im Rahmen einer Übersetzung in eine PL1-Sprache nicht berücksichtigt werden.
- Entsprechende Bemerkungen gelten auch für die Ausdrücke *jedoch*, *hingegen*, *dennoch*, *außerdem* usw.

43

## ÜBUNGEN

---

- Bitte bis zur nächsten Sitzung vorbereiten:  
Kap. 4 *Die Logik der Booleschen Junktoren!*
- Bis zum Tutorium bitte folgende Aufgaben auf Papier lösen und beim Tutor abgeben:  
3.3, 3.4, 3.14, 3.15, 3.19, 3.21, 3.23, 3.25
- Falls Sie über die Software verfügen, sollten Sie (optional!) auch die „Sie sind dran“-Abschnitte bearbeiten sowie die Aufgaben 3.2, 3.6, 3.10, 3.13, 3.16, 3.17 und 3.18!

44



## VORLESUNG 4

- Annäherung an die logische Folgerung 3
- Tautologien und logische Wahrheit 5
- Tests für tautologische und log. Wahrheit 15
- Die Methode der Wahrheitstafeln 17
- Logische und tautologische Äquivalenz 36
- Logische und tautologische Folgerung 44
- Negationszeichen verschieben 54
- Konjunktive und disjunktive Normalform 61
- Übungen 65

2

### ANNÄHERUNG AN DIE LOGISCHE FOLGERUNG

- Den für die Logik zentralen intuitiven Begriff der *logischen Folgerung* hatten wir wie folgt eingeführt:
- Eine Behauptung  $B$  *folgt logisch* aus den Aussagen  $A_1, \dots, A_n$  genau dann, wenn es nicht möglich ist, dass  $A_1, \dots, A_n$  alle wahr sind,  $B$  aber falsch ist.

3

- In Kapitel 4 geht es um eine erste Annäherung an diesen Begriff. Diese besteht im Begriff der *tautologischen Folgerung*.
- Eine Behauptung  $B$  *folgt tautologisch* aus den Aussagen  $A_1, \dots, A_n$  genau dann, wenn es bereits aufgrund der Bedeutungen der *wahrheitsfunktionalen Junktoren* nicht möglich ist, dass  $A_1, \dots, A_n$  alle wahr sind,  $B$  aber falsch ist.

4

### TAUTOLOGISCHE UND LOGISCHE WAHRHEIT

- Bevor wir uns dem Begriff der logischen Folgerung zuwenden, betrachten wir zwei speziellere Begriffe: Den Begriff der *logischen Wahrheit* sowie den der *logischen Äquivalenz*.

5

- Ein Satz ist *logisch wahr* bzw. *logisch notwendig*, wenn es nicht möglich ist, dass er falsch ist.
- Ein logisch notwendiger Satz  $S$  folgt aus jeder Menge  $\Gamma$  von Aussagen—sogar wenn  $\Gamma$  leer ist: Ist es schon nicht möglich, dass  $S$  falsch ist, dann ist es erst recht nicht möglich, dass  $S$  falsch ist und alle Aussagen aus  $\Gamma$  wahr sind!

6

- Im Rahmen der letzten Definition ist natürlich zu klären, was unter *möglich* bzw. *notwendig* verstanden werden soll.
- Im Gegensatz etwa zum physikalischen Sinne ist im logischen Sinne ein Satz *notwendig*, wenn bereits die Bedeutungen der im Satz vorkommenden Ausdrücke sowie die Struktur des Satzes dessen Wahrheit garantieren wie z.B. in:  $a = a$ .

7

- Entsprechend ist ein Satz im logischen Sinne *möglich*, wenn seine Negation nicht notwendig ist (z.B.  $a = b$ ).
- Logisch *unmöglich* ist hingegen etwa der Satz:  $a \neq a$  (die Negation des Satzes, also  $a = a$  ist notwendigerweise wahr).
- Eine präzise Annäherung an den Begriff der logischen Wahrheit ist der Begriff der *tautologischen Wahrheit* bzw. der *Tautologie*.

8

- Ein Satz S ist dabei eine *Tautologie*, wenn bereits die im Satz vorkommenden *wahrheitsfunktionalen Junktoren* (zusammen mit der Struktur des Satzes) dessen Wahrheit garantieren; wie z.B. in  $P \vee \neg P$ .
- Tautologisch wahre Sätze sind wahr unabhängig von der Bedeutung der in ihnen vorkommenden atomaren Sätze oder der Beschaffenheit der Welt.

9

- Somit sind alle *tautologischen Wahrheiten* auch *logische Wahrheiten*, aber nicht umgekehrt:  $a = a$  ist logisch wahr aber keine Tautologie. Bei  $a = a$  kann es sich nicht um eine Tautologie handeln, da der Satz keine wahrheitsfunktionalen Junktoren enthält.
- Der Begriff der logischen Wahrheit ist somit *weiter* als der Begriff der tautologischen Wahrheit.

10

- Der erwähnte *physikalische* Notwendigkeitsbegriff ist hingegen *weiter* als der logische: Alle *logischen Wahrheiten* bzw. *Notwendigkeiten* sind auch *physikalische Notwendigkeiten* —aber nicht umgekehrt!

11

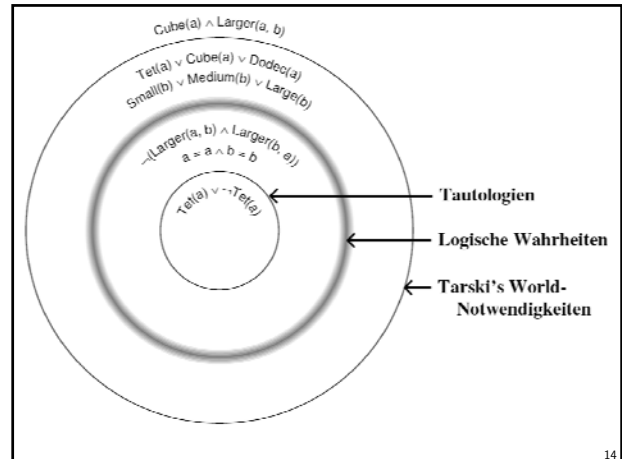
- Ein weiterer Notwendigkeitsbegriff, den wir implizit bereits kennen gelernt haben, ist der Begriff der *Tarski's World-Notwendigkeit* (oder kurz: *T'sW-notwendig*).
- Dabei ist ein Satz S T'sW-notwendig, wenn S in *allen* Klötzchenwelten wahr ist (in denen S einen Wahrheitswert besitzt).
- Zu den T'sW-notwendigen Sätzen gehören somit alle Sätze der Klötzchensprache, die aufgrund der Beschaffenheit der Klötzchenwelten nicht falsch werden können.

12



- Wie im Falle des physikalischen Notwendigkeitsbegriffes ist auch der Begriff *T'sW-notwendig* weiter als der logische Notwendigkeitsbegriff:
- Jeder logisch notwendige Satz ist auch T'sW-notwendig aber nicht umgekehrt: Der Satz  $\text{Large}(b) \vee \text{Medium}(b) \vee \text{Small}(b)$  ist etwa T'sW-notwendig, aber nicht logisch notwendig.

13



14

### TESTS FÜR TAUTOLOGISCHE UND LOGISCHE WAHRHEIT

- Da der Begriff der T'sW-Notwendigkeit umfassender ist als der Begriff der logischen Notwendigkeit, zeigt die Wahrheit eines Satzes S in allen Klötzchenwelten nicht, dass S auch logisch wahr ist.

15

- Auf der anderen Seite ist der Begriff der T'sW-Möglichkeit **nicht** so umfassend wie der Begriff der logischen Möglichkeit.
- Dabei ist ein Satz T'sW-möglich, wenn er wahr in mindestens einer Klötzchenwelt ist.
- Natürlich gibt es logisch wahre Sätze, die wir nicht einmal in der Klötzchensprache ausdrücken können. Daher sind zwar alle Sätze, die T'sW-möglich sind, auch logisch möglich, aber nicht umgekehrt.

16

### DIE METHODE DER WAHRHEITSTAFELN

- Durch die Konstruktion einer Klötzchenwelt kann somit gezeigt werden, dass ein Satz logisch möglich ist.
- Im Gegensatz dazu hätten wir, selbst wenn wir im Falle eines Satzes S zeigen können, dass er in *allen* Klötzchenwelten gilt, nicht seine logische Notwendigkeit erwiesen.

17

- Demgegenüber haben wir gezeigt, dass ein Satz logisch notwendig ist, sobald wir gezeigt haben, dass er eine Tautologie ist.
- Ob ein Satz tautologisch wahr bzw. eine Tautologie ist, können wir mit (erweiterten) Wahrheitstafeln testen.
- Nach dem bisher Gesagten ist aber auch klar, dass wir nicht alle logischen Wahrheiten (wie etwa  $a = a$ ) mit dem Wahrheitstafeltest als solche erweisen können!

18

- Um einen Satz S auf tautologische Notwendigkeit zu überprüfen, benötigen wir eine Wahrheitstafel mit  $n + 1$ -vielen Spalten, wobei  $n$  die Anzahl der in S vorkommenden atomaren Aussagen sei. Zuerst tragen wir Letztere in die ersten  $n$  Spalten ein (die sog. *Referenzspalten*), in die letzte Spalte tragen wir S ein (von den Referenzspalten durch eine doppelte Linie getrennt).

19

- Wollen wir etwa überprüfen, ob es sich bei  $(\text{Cube}(a) \wedge \text{Cube}(b)) \vee \neg \text{Cube}(c)$  um eine Tautologie handelt, bilden wir eine Wahrheitstafel wie folgt (wir kürzen dabei  $\text{Cube}(a)$  durch A,  $\text{Cube}(b)$  durch B und  $\text{Cube}(c)$  durch C ab):

A	B	C	$(A \wedge B) \vee \neg C$

20

A	B	C	$(A \wedge B) \vee \neg C$
W	W	W	
W	W	F	
W	F	W	
W	F	F	
F	W	W	
F	W	F	
F	F	W	
F	F	F	

21

- Als Nächstes bestimmen wir die Wahrheitswerte der Teilaussagen von  $(A \wedge B) \vee \neg C$ , die sich aufgrund der Referenzspalten ergeben. Bei den Teilsätzen, deren Wahrheitswerte wir auf diese Weise bestimmen können, handelt es sich um  $A \wedge B$  und  $\neg C$ :

22

A	B	C	$(A \wedge B)$	$\neg C$
W	W	W	W	F
W	W	F	W	W
W	F	W	F	F
W	F	F	F	W
F	W	W	F	F
F	W	F	F	W
F	F	W	F	F
F	F	F	F	W

23

- Aufgrund der Wahrheitswerte der kleineren Teilsätze können wir auch die Werte größerer Teilsätze bestimmen. Schließlich können wir angeben, wie der Wahrheitswert des Gesamtsatzes von den Wahrheitswerten seiner atomaren Bestandteile abhängt:

24

A	B	C	$(A \wedge B) \vee \neg C$		
W	W	W	W	<b>W</b>	F
W	W	F	W	<b>W</b>	W
W	F	W	F	<b>F</b>	F
W	F	F	F	<b>W</b>	W
F	W	W	F	<b>F</b>	F
F	W	F	F	<b>W</b>	W
F	F	W	F	<b>F</b>	F
F	F	F	F	<b>W</b>	W

25

- Der Satz ist falsch beispielsweise, wenn A (bzw. Cube(a)) wahr, B (bzw. Cube(b)) falsch und C (bzw. Cube(c)) wahr ist.
- Somit handelt es sich also bei dem Satz  $(\text{Cube}(a) \wedge \text{Cube}(b)) \vee \neg \text{Cube}(c)$  nicht um eine Tautologie.
- Da es zudem Klötzchenwelten gibt, in denen a und c Würfel sind, b aber nicht, handelt es sich bei dem Satz zudem auch nicht um eine logische Wahrheit.

26

- Ein Satz ist eine Tautologie wenn sich in seiner Wahrheitstafel unter seinem Hauptjunktorenur der Wahrheitswert wahr (w) befindet.
- Ein solcher tautologischer Satz wird auch *WT-notwendig* genannt. Ein Satz, in dessen Wahrheitstafel sich mindestens ein w unter seinem Hauptjunktoren findet, wird auch *WT-möglich* genannt.

27

- Ein Beispiel für einen tautologischen bzw. *WT-notwendigen* Satz bildet etwa jede Aussage der Form  $A \vee \neg A$ ; was auch als *Prinzip vom ausgeschlossenen Dritten* bekannt ist:

A	$A \vee \neg A$
W	<b>W</b>
F	<b>W</b>

28

- Um den *Hauptjunktoren* zu bestimmen, kann man folgende Überlegung anstellen:
- Die Sätze einer PL1-Sprache sind nach bestimmten syntaktischen Regeln gebildet (die wir im Zusammenhang mit den Symbolen  $=, \neg, \wedge$  und  $\vee$  schon kennen gelernt hatten). Komplexe Formeln werden durch *wiederholte* Regelanwendungen gebildet.

29

- 1.**  $a = b$  ist wohlgeformt (Regel für  $=$ )
- 2.**  $b = c$  ist wohlgeformt (Regel für  $=$ )
- 3.**  $a = b \wedge b = c$  ... (Regel für  $\wedge$ )
- 4.**  $\neg(a = b \wedge b = c)$  ... (Regel für  $\neg$ )
- 5.**  $\neg(a = b \wedge b = c) \vee a = b$  (Regel für  $\vee$ )
- 1.** und **2.** sind atomar und besitzen keinen Hauptjunktoren. **3.** ist eine Konjunktion, der Hauptjunktoren ist  $\wedge$ . **4.** ist eine Negation, der Hauptjunktoren ist  $\neg$ . **5.** ist eine Disjunktion, der Hauptjunktoren ist  $\vee$ .

30

- $P \wedge Q \wedge R$  fassen wir dabei als Abkürzung auf für  $(P \wedge Q) \wedge R$ ; der Hauptjunktoren ist also das am weitesten rechts befindliche  $\wedge$ . Entsprechendes gilt für  $P \vee Q \vee R$ .
- Im Laufe des Kurses werden wir eine weitere Technik kennen lernen, mit der gezeigt werden kann, dass es sich bei einem Satz um eine logische Wahrheit handelt. Diese Technik besteht im Führen eines Beweises ohne Prämissen.

31

- Während die Methode der Wahrheitstabellen nur auf Tautologien angewandt werden kann, kann mit Hilfe von Beweisen auch der logisch wahre Charakter von anderen Aussagen nachgewiesen werden—wie etwa im Falle von  $a = a$ . (Jede Tautologie kann aber auch durch einen Beweis als solche ‚überführt‘ werden.)

32

- Ein solcher Beweis für  $a = a$  sieht dabei wie folgt aus (in der Regel werden Beweise aber etwas komplizierter sein):
- $\frac{}{1. a = a} = \text{Intro}$
- Die Wahrheitstabelmethode berücksichtigt *ausschließlich* die Bedeutungen der *wahrheitsfunktionalen Junktoren* und lässt die Bedeutungen bestimmter Prädikate in atomaren Sätzen außer Acht.

33

- Daher erweist sie den Satz  $\neg(\text{Larger}(a, b) \wedge \text{Larger}(b, a))$  nicht als logische Wahrheit, obwohl es sich bei dem Satz um eine solche zu handeln scheint.
- Der Satz ist aber keine Tautologie: Es gibt andere Sätze von derselben Form, die falsch sind, z.B.:  $\neg(\text{Cube}(a) \wedge \text{Large}(a))$ .

34

- Natürlich ist es nicht ausgeschlossen, dass es große Würfel gibt. Der obige Satz ist daher *nicht* nur aufgrund seiner Struktur und der Bedeutungen seiner wahrheitsfunktionalen Junktoren wahr!

$L(a, b)$	$L(b, a)$	$\neg(L(a, b) \wedge L(b, a))$	
W	W	<b>F</b>	W
W	F	<b>W</b>	F
F	W	<b>W</b>	F
F	F	<b>W</b>	F

35

### LOGISCHE UND TAUTOLOGISCHE ÄQUIVALENZ

---

- Die Sätze  $S$  und  $S'$  sind *logisch äquivalent*, wenn sie dieselben Wahrheitsbedingungen besitzen bzw. wenn es nicht möglich ist, dass einer von beiden wahr, der andere aber falsch ist.

36

- Eine Annäherung an diesen Begriff stellt der folgende Begriff dar:
- Die Sätze S und S' sind *tautologisch äquivalent*, wenn sich *bereits aus den Bedeutungen der in ihnen vorkommenden wahrheitsfunktionalen Junktoren* (und der Struktur der Sätze) ergibt, dass es unmöglich ist, dass einer der Sätze wahr, der andere aber falsch ist.
- Ob zwei Sätze tautologisch äquivalent sind, lässt sich wiederum mit Hilfe von Wahrheitstafeln überprüfen.

37

- Um zu prüfen, ob S und S' tautologisch äquivalent sind, bildet man eine *gemeinsame Wahrheitstafel* für S und S'. Dabei gibt es je eine Referenzspalte für jeden atomaren Satz, der in einem der Sätze S oder S' vorkommt.
- S und S' sind *tautologisch äquivalent*, wenn die Spalten unter ihren Hauptjunktoren in ihrer gemeinsamen Wahrheitstafel übereinstimmen.

38

- So zeigt die folgende gemeinsame Wahrheitstafel die de Morgansche Äquivalenz  
 $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ :
- | P | Q | $\neg(P \wedge Q)$ | $(\neg P \vee \neg Q)$ |
|---|---|--------------------|------------------------|
| W | W | F                  | F                      |
| W | F | W                  | W                      |
| F | W | W                  | W                      |
| F | F | W                  | W                      |

39

- Die folgende Wahrheitstafel zeigt, dass A und  $\neg\neg A$  tautologisch äquivalent sind, und somit auch, dass  $A \Leftrightarrow \neg\neg A$  gilt:
- | A | A | $\neg\neg A$ |
|---|---|--------------|
| W | W | W            |
| F | F | F            |

40

- Wie im Falle der tautologischen Wahrheit ist auch der Begriff der tautologischen Äquivalenz nur eine Annäherung an den Begriff der logischen Äquivalenz: Zwar sind alle tautologisch äquivalenten Sätze auch logisch äquivalent, aber nicht umgekehrt.

41

- So gilt etwa  
 $a = b \wedge \text{Cube}(a) \Leftrightarrow a = b \wedge \text{Cube}(b)$   
 aufgrund der Bedeutungen der atomaren Sätze—und nicht nur aufgrund der Bedeutungen der wahrheitsfunktionalen Junktoren. Die Sätze  $a = b \wedge \text{Cube}(a)$  und  $a = b \wedge \text{Cube}(b)$  sind so nicht tautologisch äquivalent.

42

$a = b$	Cube(a)	Cube(b)	$a = b \wedge$ Cube(a)	$a = b \wedge$ Cube(b)
W	W	W	W	W
W	W	F	W	F
W	F	W	F	W
W	F	F	F	F
F	W	W	F	F
F	W	F	F	F
F	F	W	F	F
F	F	F	F	F

43

### LOGISCHE UND TAUTOLOGISCHE FOLGERUNG

- Logische Wahrheit und logische Äquivalenz sind Spezialfälle der logischen Folgerung: Logisch wahr ist ein Satz, der aus *jeder* Menge von Prämissen folgt; logisch äquivalent sind zwei Sätze, von denen jeder aus dem anderen folgt.

44

- Wiederum können wir uns diesem Begriff nähern mit Hilfe eines weniger umfassenden Begriffes, der aber mit Hilfe von Wahrheitstafeln überprüfbar ist. Dabei handelt es sich um den Begriff der *tautologischen Folgerung*.
- Dabei ist ein Satz B eine *tautologische Folgerung* der Sätze  $A_1, \dots, A_n$ , wenn *bereits die Bedeutungen der wahrheitsfunktionalen Junktoren* garantieren, dass, wenn die Prämissen wahr sind, dann auch die Konklusion wahr ist.

45

- Um zu überprüfen, ob B eine *tautologische Folgerung* der Sätze  $A_1, \dots, A_n$  ist, bildet man die gemeinsame Wahrheitstafel von  $A_1, \dots, A_n$  und B. B ist eine tautologische Folgerung aus den Prämissen, wenn B in allen Zeilen wahr ist, in denen auch alle Prämissen wahr sind.

46

- So zeigt etwa die folgende Wahrheitstafel, dass B aus  $A \vee B$  und  $\neg A$  folgt:

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	B
W	W	F	W	W
W	F	F	W	F
F	W	W	W	W
F	F	W	F	F

47

- Wiederum ist der Begriff der tautologischen Folgerung nur eine Annäherung an den Begriff der logischen Folgerung: Zwar ist jede tautologische Folgerung auch eine logische Folgerung, aber nicht umgekehrt.
- So folgt etwa  $a = c$  logisch aus  $a = b$  und  $b = c$ , es handelt sich aber nicht um eine tautologische Folgerung.

48

- In einer entsprechenden Wahrheitstafel gäbe es eine Zeile, in der  $a = b$  und  $b = c$  wahr sind,  $a = c$  aber falsch ist. Dieser Umstand ist zwar aufgrund der Bedeutungen der Sätze ausgeschlossen, aber im Rahmen von Wahrheitstafeln können nur die Bedeutungen der wahrheitsfunktionalen Junktoren berücksichtigt werden.
- Im Laufe des Kurses werden wir noch eine bessere Annäherung an den Begriff der logischen Folgerung kennen lernen, den wir PL1-Folgerung nennen werden.

49

- Der Begriff der PL1-Folgerung ist dabei eine Erweiterung des Begriffes der tautologischen Folgerung. So ist  $a = c$  etwa eine PL1-Folgerung aus  $a = b$  und  $b = c$ .
- Ebenso zählen zu PL1-Folgerungen Schlüsse mit quantifizierten Prämissen wie *Alle Menschen sind sterblich, Sokrates ist ein Mensch; also: Sokrates ist sterblich.*

50

- Eine noch umfassendere Annäherung an den Begriff der logischen Folgerung als der Begriff der PL1-Folgerung ist der Begriff der *analytischen Folgerung*.
- Hier werden nicht nur die Bedeutungen des logischen Vokabulars wie  $=$ ,  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$  und der Quantoren berücksichtigt (die wir noch kennen lernen werden), sondern auch die Bedeutungen des nicht-logischen Vokabulars (also der Prädikate und Relationsausdrücke außer  $=$ , die in atomaren Sätzen vorkommen können).

51

- Während wir im Falle des logischen Vokabulars (wie bereits bei  $=$ ) Schlussregeln angeben können, deren Befolgung uns garantiert, dass eine somit gewonnene Konklusion eine tautologische bzw. eine PL1-Folgerung aus den Prämissen ist, ist ein entsprechendes Vorgehen im Falle analytischer Folgerungen jedoch nicht umsetzbar.

52

- Das Programm *Tarski's World* erlaubt Ihnen in vielen Fällen jedoch zu prüfen, ob eine Konklusion eine tautologische Folgerung (**Taut Con**), PL1-Folgerung (**FO Con**) oder eine analytische Folgerung (**Ana Con**) aus gegebenen Prämissen ist.

53

### NEGATIONSZEICHEN VERSCHIEBEN

- Sind zwei Sätze logisch äquivalent, folgt der eine aus dem anderen und umgekehrt. Hat man in einem informellen Beweis daher  $P$  bewiesen, darf man auch zu  $Q$  übergehen, falls  $P \Leftrightarrow Q$  gilt.

54

- Ebenso kann man einen Teilsatz eines größeren Satzes durch einen äquivalenten Satz ersetzen. Im Falle von

$$\neg(\text{Cube}(a) \wedge \neg\neg\text{Small}(a))$$

kann man so aufgrund des Prinzips der doppelten Negation  $\neg\neg\text{Small}(a)$  durch das einfachere  $\text{Small}(a)$  ersetzen, woraus sich der zum Ausgangssatz äquivalente Satz ergibt:

$$\neg(\text{Cube}(a) \wedge \text{Small}(a))$$

55

- Im Allgemeinen bedeutet dies: Wenn  $P \Leftrightarrow Q$  gilt, dann gilt auch  $S(P) \Leftrightarrow S(Q)$ , wobei  $S(P)$  ein (möglicherweise komplexer) Satz ist, der den (möglicherweise komplexen) Satz  $P$  als Teil enthält, und  $S(Q)$  entsteht durch die Ersetzung von  $Q$  für  $P$  in  $S(P)$ .
- Das Prinzip heißt *Substitution logischer Äquivalenzen*.

56

- Mit Hilfe dieses Prinzips, der de Morganschen Gesetze und dem Prinzip der doppelten Negation lässt sich jeder Satz, der nur mittels  $\wedge$ ,  $\vee$  und  $\neg$  und atomaren Sätzen aufgebaut ist, in die sog. *Negations-Normalform* (NNF) überführen. Dabei ist ein Satz in NNF, wenn in ihm Negationszeichen nur unmittelbar vor atomaren Sätzen auftreten.

57

- Das folgende Beispiel zeigt, wie ein Satz in NNF überführt werden kann:

$$\begin{aligned} \neg((A \vee B) \wedge \neg C) &\Leftrightarrow \neg(A \vee B) \vee \neg\neg C \\ &\Leftrightarrow \neg(A \vee B) \vee C \\ &\Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B) \vee C \end{aligned}$$

- Einige wichtige Äquivalenzen:
- *Assoziativität von  $\wedge$*   
 $P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge Q \wedge R$
- *Assoziativität von  $\vee$*   
 $P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$

58

- Weitere wichtige Äquivalenzen:

- *Kommutativität von  $\wedge$*

$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$$

- *Kommutativität von  $\vee$*

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$$

- *Idempotenz von  $\wedge$*

$$P \wedge P \Leftrightarrow P$$

- *Idempotenz von  $\vee$*

$$P \vee P \Leftrightarrow P$$

59

- Einen Beweis, der schrittweise zeigt, dass ein Satz äquivalent zu einem anderen ist, nennt man auch *Äquivalenzkette*. Beispiel:

$$\begin{aligned} (A \vee B) \wedge C \wedge (\neg(\neg B \wedge \neg A) \vee B) &\Leftrightarrow \\ (A \vee B) \wedge C \wedge ((B \vee A) \vee B) &\Leftrightarrow \\ (A \vee B) \wedge C \wedge (B \vee A \vee B) &\Leftrightarrow \\ (A \vee B) \wedge C \wedge (B \vee A) &\Leftrightarrow \\ (A \vee B) \wedge C \wedge (A \vee B) &\Leftrightarrow \\ (A \vee B) \wedge C & \end{aligned}$$

60



### KONJUNKTIVE UND DISJUNKTIVE NORMALFORM

- Die sog. *Distributivgesetze* besagen, dass für beliebige Sätze P, Q und R gilt:
- **1.**  $\wedge$  distribuiert über  $\vee$ :  

$$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$
- **2.**  $\vee$  distribuiert über  $\wedge$ :  

$$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$$

61

- Mit Hilfe der Distributivgesetze kann jeder Satz, der aus Literalen,  $\wedge$  und  $\vee$  aufgebaut ist, in einen äquivalenten Satz in der sog. *disjunktiven Normalform* oder in einen äquivalenten Satz in *konjunktiver Normalform* überführt werden.
- Dabei ist ein Satz in *disjunktiver Normalform* (DNF), wenn er eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist. Ein Satz ist in *konjunktiver Normalform* (KNF), wenn er eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist.

62

- Beispiel für die Überführung eines Satzes in *disjunktive Normalform*:
- $(A \vee B) \wedge (C \vee D) \Leftrightarrow$   

$$[(A \vee B) \wedge C] \vee [(A \vee B) \wedge D] \Leftrightarrow$$
  

$$(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee [(A \vee B) \wedge D] \Leftrightarrow$$
  

$$(A \wedge C) \vee (B \wedge C) \vee (A \wedge D) \vee (B \wedge D)$$

63

- Beispiel für die Überführung eines Satzes in *konjunktive Normalform*:
- $(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \Leftrightarrow$   

$$[(A \wedge B) \vee C] \wedge [(A \wedge B) \vee D] \Leftrightarrow$$
  

$$(A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge [(A \wedge B) \vee D] \Leftrightarrow$$
  

$$(A \vee C) \wedge (B \vee C) \wedge (A \vee D) \wedge (B \vee D)$$

64

### ÜBUNGEN

- Bitte bis zur nächsten Vorlesung vorbereiten: **Kap. 5 bis einschließlich Kap. 6.3** (*Beweismethoden für die Boolesche Logik & Formale Beweise und Boolesche Logik*)!
- Bis zum Tutorium bitte folgende Aufgaben auf Papier lösen und beim Tutor abgeben:  
4.2, 4.4, 4.6, 4.7, 4.13, 4.17, 4.20, 4.23, 4.25
- Falls Sie über die Software verfügen, sollten Sie (optional!) auch die „Sie sind dran“-Abschnitte bearbeiten!

65



## VORLESUNG 5

- Beweismethoden f. d. Booleschen Junktoren 3
- Gültige Ableitungsschritte 5
- Fallunterscheidung 9
- Beweis durch Widerspruch 14
- Argumente mit inkonsistenten Prämissen 21
- Formale Beweise und Boolesche Logik 23
- Konjunktionsregeln 25
- Disjunktionsregeln 30
- Negationsregeln 35, Übungen 46

2

## BEWEISMETHODEN FÜR DIE BOOLESCHEN JUNKTOREN

- Das Vorliegen von logischer Wahrheit, Folgerung und Äquivalenz kann nicht nur mit Wahrheitstafeln, sondern auch mit Hilfe von *Beweisen* gezeigt werden.

3

- Die Wahrheitstafel-Methode besitzt dabei zwei wesentliche Nachteile:
- Zum einen kann die Anwendung der Methode recht umständlich werden. So benötigt eine Wahrheitstafel mit 7 Referenzspalten bereits  $2^7 = 128$  Zeilen.
- Zum anderen ist sie nicht auf Argumente übertragbar, deren Gültigkeit nicht nur von den wahrheitsfunktionalen Junktoren abhängt.

4

## GÜLTIGE ABLEITUNGSSCHRITTE

- In diesem Kapitel geht es um einfache Schritte, sog. *gültige Ableitungsschritte*, die in einem informellen Beweis zulässig sind, sowie um zwei komplexere *Beweismethoden* für die booleschen Junktoren.
- Bei den Beweismethoden handelt es sich um den sog. *Beweis durch Widerspruch* und die sog. *Fallunterscheidung*.

5

- Darauf sollen die formalen Entsprechungen dieser Schritte bzw. Methoden für unser formales System  $\mathcal{F}$  besprochen werden.
- In informellen Beweisen ist prinzipiell jeder Ableitungsschritt zulässig, falls klar ist, dass der in dem Schritt hergeleitete Satz aus den Prämissen folgt. (Natürlich dürfen Folgerungen, die in einem Beweis erwiesen werden sollen, nicht in dem Beweis verwendet werden.)

6

- Aufgrund der Wahrheitstafelmethode wissen wir somit, dass wir aus dem doppelt negierten Satz  $\neg\neg P$  den Satz  $P$  herleiten können (und umgekehrt). Ebenso wissen wir (Idempotenz), dass wir aus  $P \vee P$  (wie auch im Falle von  $P \wedge P$ ) den Satz  $P$  herleiten können (und umgekehrt). Auch dürfen Äquivalenzketten verwendet werden.
- Ebenso können wir logische Wahrheiten wie  $a = a$  oder  $P \vee \neg P$  stets in einen Beweis aufnehmen, da sie aus jeder Prämissenmenge—sogar aus der leeren—folgen.

7

- Zu den gültigen Ableitungsschritten zählen insbesondere die folgenden: Die Herleitung von  $P$  aus  $P \wedge Q$ , die Herleitung von  $P \wedge Q$  aus  $P$  und  $Q$  sowie die Herleitung von  $P \vee Q$  aus  $P$  (oder aus  $Q$ ).
- Den ersten Schritt werden wir im Rahmen unseres formalen Systems  $\mathcal{F}$  bezeichnen als *Konjunktions-Beseitigung*, den zweiten als *Konjunktions-Einführung* und den dritten als *Disjunktions-Einführung*.

8

### FALLUNTERSCHIEDUNG

- Ein *Beweis durch Fallunterscheidung* verfährt wie folgt: Angenommen,  $P \vee Q$  gehört zu unseren Prämissen und wir können zeigen, dass ein Satz  $S$  aus  $P$  folgt und ebenso, dass  $S$  aus  $Q$  folgt. Dann können wir auf  $S$  schließen (aufgrund der Prämisse  $P \vee Q$ ).

9

- Im Allgemeinen dürfen wir ausgehend von einer Disjunktion  $P_1, \dots, P_n$  auf  $S$  schließen, wenn wir  $S$  auch ausgehend von jedem einzelnen Disjunkt  $P_1$  bis  $P_n$  herleiten können.
- Beispiel: Wir wollen zeigen, dass  $\text{Small}(c)$  logisch folgt aus:  

$$(\text{Cube}(c) \wedge \text{Small}(c)) \vee (\text{Tet}(c) \wedge \text{Small}(c))$$
 Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden, die den beiden Disjunkten entsprechen:

10

- Im ersten Fall gilt  $\text{Cube}(c) \wedge \text{Small}(c)$  und somit wegen Konjunktions-Beseitigung  $\text{Small}(c)$ .
- Im zweiten Fall ergibt sich ebenfalls aufgrund der Konjunktions-Beseitigung  $\text{Small}(c)$  aus dem zweiten Disjunkt  $\text{Tet}(c) \wedge \text{Small}(c)$ .
- Unabhängig davon, welcher von beiden Fällen gilt, folgt also  $\text{Small}(c)$ . Da nach der Ausgangsprämisse  

$$(\text{Cube}(c) \wedge \text{Small}(c)) \vee (\text{Tet}(c) \wedge \text{Small}(c))$$
 zumindest einer der Fälle zutreffen muss, folgt auch aus dieser  $\text{Small}(c)$ .

11

- Das folgende Beispiel verdeutlicht den Nutzen der Disjunktions-Einführung:
- Wir zeigen, dass  $\text{Froh}(\text{carl}) \vee \text{Froh}(\text{mauzi})$  logisch folgt aus:  

$$(\text{Zuhause}(\text{max}) \wedge \text{Froh}(\text{carl})) \vee$$

$$(\text{Zuhause}(\text{claire}) \wedge \text{Froh}(\text{mauzi}))$$

12

- Im Falle des ersten Disjunktts gilt  $Zuhause(max) \wedge Froh(carl)$ , woraus sich wiederum aufgrund der Konjunktions-Beseitigung  $Froh(carl)$  ergibt. Mit Hilfe der Disjunktions-Einführung kann man somit auf  $Froh(carl) \vee Froh(mauzi)$  schließen.
- Im Falle des zweiten Disjunktts ergibt sich entsprechend dem ersten Fall  $Froh(mauzi)$ . Auch hier benötigen wir die Disjunktions-Einführung, um die gewünschte Konklusion  $Froh(carl) \vee Froh(mauzi)$  zu erhalten.

13

### **BEWEIS DURCH WIDERSPRUCH**

- *Beweise durch Widerspruch* sind auch bekannt unter den Bezeichnungen *indirekter Beweis*, *Negations-Einführung* oder auch *reductio ad absurdum*.

14

- Die Grundidee eines Beweises durch Widerspruch ist dabei die folgende:
- Um  $\neg S$  ausgehend von den Prämissen  $P_1, \dots, P_n$  zu beweisen, kann man zunächst  $S$  annehmen und dann zeigen, dass aus dieser Annahme ein Widerspruch folgt.
- Wenn wir einen Widerspruch aus  $P_1, \dots, P_n$  und  $S$  herleiten können, zeigt dies, dass  $S$  falsch sein muss, wenn wir  $P_1, \dots, P_n$  voraussetzen, weshalb  $\neg S$  gelten muss.

15

- Beispiel: Wir wollen zeigen, dass  $\neg(b = c)$  aus  $Cube(c) \vee Dodec(c)$  und  $Tet(b)$  logisch folgt:
- Um zu einem Widerspruch zu gelangen, nehmen wir an, dass  $b = c$  gilt. Wegen der ersten Prämisse gilt  $Cube(c)$  oder  $Dodec(c)$ .
- Im ersten Fall gilt wegen  $b = c$  auch  $Cube(b)$ , was  $Tet(b)$  widerspricht.
- Im zweiten Fall ergibt sich wegen  $b = c$  der Satz  $Dodec(b)$ , was auch  $Tet(b)$  widerspricht.

16

- In beiden Fällen ergibt sich somit ein Widerspruch, was zeigt, dass  $\neg(b = c)$  aus den Prämissen  $Cube(c) \vee Dodec(c)$  und  $Tet(b)$  folgt (da  $b = c$  unvereinbar mit den Prämissen ist).
- Dabei versteht man unter einem Widerspruch einen Satz, der nicht wahr sein kann bzw. eine sog. *inkonsistente* Menge von Sätzen, von denen nicht alle zusammen wahr sein können.
- Beispiele sind somit Sätze wie  $Q \wedge \neg Q$  oder  $a \neq a$  bzw. die Mengen  $\{Cube(c), Tet(c)\}$  und  $\{x < y, y < x\}$ .

17

- Einen solchen Widerspruch kürzt man oft durch das Symbol  $\perp$  ab, das man häufig auch als *Falsum* bezeichnet.
- Ein Satz  $S$  ist unmöglich wahr bzw. *logisch unmöglich*, wenn seine Negation  $\neg S$  logisch notwendig ist.
- Ist also  $\neg S$  tautologisch (und somit auch logisch) wahr, dann ist  $S$  widersprüchlich.

18

- Ein Satz, der aufgrund der Bedeutungen seiner Junktoren widersprüchlich ist, kann mit Hilfe von Wahrheitstafeln als widersprüchlich erwiesen werden.
- Allerdings gibt es widersprüchliche Sätze, die *nicht* aufgrund ihrer Junktoren widersprüchlich sind—wie z.B.  $a \neq a$ .
- Haben wir mit Hilfe von Wahrheitstafeln gezeigt, dass  $\neg S$  tautologisch ist, haben wir dem Obigen zufolge ebenfalls gezeigt, dass  $S$  widersprüchlich ist.

19

- Sind Satzmenge aufgrund der Bedeutungen ihrer wahrheitsfunktionalen Junktoren widersprüchlich, kann auch dies mit Hilfe von Wahrheitstafeln festgestellt werden:
- Eine solche Menge von Sätzen wird *WT-widersprüchlich* genannt; im Rahmen ihrer gemeinsamen Wahrheitstafel ist in jeder Zeile zumindest einer der Sätze falsch.

20

### ARGUMENTE MIT INKONSISTENTEN PRÄMISSEN

- Aus inkonsistenten Prämissen  $P_1, \dots, P_n$  folgt *jeder* beliebige Satz  $S$ . Da es schon nicht sein kann, dass  $P_1, \dots, P_n$  zusammen wahr sind, kann es erst recht nicht sein, dass  $P_1, \dots, P_n$  alle wahr sind,  $S$  aber falsch ist.
- Ein Argument mit inkonsistenten Prämissen ist somit trivialerweise gültig—aber niemals schlüssig!

21

- Aufgrund der obigen Überlegung kann auch das Prinzip *ex falso quodlibet* eingesehen werden: Aus einem Widerspruch  $\perp$  folgt jeder beliebige Satz.
- Im Falle von Argumenten mit inkonsistenten Prämissen können wir—ausnahmsweise—mit logischen Mitteln feststellen, dass das Argument nicht schlüssig ist, nämlich dann, wenn wir nur aus den Prämissen  $\perp$  herleiten.

22

### FORMALE BEWEISE UND BOOLESCHES LOGIK

- Das System  $\mathcal{F}$ , von dem wir bereits die Regeln für  $=$  kennen gelernt haben, ist ein sog. *Kalkül des natürlichen Schließens*. Im Rahmen solcher Kalküle werden unsere informellen Schlussregeln modelliert.

23

- Im Gegensatz zu informellen Beweisen darf in  $\mathcal{F}$  nur auf einen bestimmten (relativ spärlichen) festgelegten Bestand logischer Schlussregeln zurückgegriffen werden.
- Es darf also nicht ohne weiteres wie im Falle informeller Beweise auf eine beliebige logische Konsequenz der Prämissen geschlossen werden.
- Wie im Falle von  $=$  werden im Rahmen von  $\mathcal{F}$  auch für jeden Junktor je eine *Einführungs-* und eine *Beseitigungsregel* festgelegt.

24

**KONJUNKTIONSREGELN**

- **∧-Beseitigung** (∧ Elimination/∧ **Elim**):

$$\begin{array}{l} | P_1 \wedge \dots \wedge P_i \wedge \dots \wedge P_n \\ | \vdots \\ \triangleright | P_i \end{array}$$

(Es kann auch  $P_i = P_1$  oder  $P_i = P_n$  sein.)

25

- **∧-Einführung** (∧ Introdution/∧ **Intro**):

$$\begin{array}{l} | P_1 \\ | \Downarrow \\ | P_n \\ | \vdots \\ \triangleright | P_1 \wedge \dots \wedge P_n \end{array}$$

- Der Pfeil „ $\Downarrow$ “ soll dabei ausdrücken, dass  $P_1$  bis  $P_n$  im Beweis bereits aufgetreten sein müssen (in beliebiger Reihenfolge), damit auf  $P_1 \wedge \dots \wedge P_n$  geschlossen werden kann.

26

- Im Rahmen eines formalen Beweises müssen alle Schritte *begründet* werden. Im Falle der ∧ Beseitigung wird dazu die Regel genannt (abgekürzt: ∧ **Elim**) sowie die Zeile, in der die Konjunktion vorkommt.
- Im Falle der ∧ Einführung (abgekürzt: ∧ **Intro**) werden die Zeilen genannt, in denen die Konjunkte einzeln vorkommen.

27

- *Beispiel:*

$$\begin{array}{l} | 1. A \wedge B \wedge C \\ | 2. B \quad \quad \quad \wedge \text{Elim: } 1 \\ | 3. C \quad \quad \quad \wedge \text{Elim: } 1 \\ | 4. C \wedge B \quad \quad \wedge \text{Intro: } 3, 2 \end{array}$$

- Im Falle der Regel der ∧ Einführung ist es wichtig, auf Klammern zu achten, die man sich bei den einzelnen Konjunkten ersparen konnte aufgrund unserer Konvention, die äußersten Klammern wegzulassen.

28

- Anderenfalls können Mehrdeutigkeiten entstehen wie im folgenden Beispiel:

$$\begin{array}{l} | 1. A \vee B \\ | 2. C \\ | 3. A \vee B \wedge C \quad \wedge \text{Intro: } 1, 2 \end{array}$$

- Korrekt wäre hingegen das Folgende:

$$\begin{array}{l} | 1. A \vee B \\ | 2. C \\ | 3. (A \vee B) \wedge C \quad \wedge \text{Intro: } 1, 2 \end{array}$$

29

**DISJUNKTIONSREGELN**

- **∨-Einführung** (∨ Introdution/∨ **Intro**):

$$\begin{array}{l} | P_i \\ | \vdots \\ \triangleright | P_1 \vee \dots \vee P_i \vee \dots \vee P_n \end{array}$$

(Es kann auch  $P_i = P_1$  oder  $P_i = P_n$  sein.)

30

- Wie im Falle der  $\wedge$  Einführung ist es auch bei dieser Regel wichtig, auf die Klammerung zu achten.
- Die Regel der  $\vee$  Beseitigung entspricht der informellen Methode der Fallunterscheidung. Die Beweisführung im Rahmen der unterschiedenen Fälle wird in  $\mathcal{F}$  von sog. *Unterbeweisen* übernommen.

31

- Ein Unterbeweis ist, wie der Name schon nahe legt, ein Teil eines umfassenderen Beweises. In der Regel beginnt ein Unterbeweis mit einer Annahme, an der allerdings im Gegensatz zu den Annahmen des Hauptbeweises nur *vorübergehend* festgehalten wird.
- Eine solche zwischenzeitliche Annahme wird (wie die Prämissen des Hauptbeweises auch) durch einen Fitch-Balken vom Rest des Beweises abgehoben.

32

- Beispiel:*

1.	$(A \wedge B) \vee (C \wedge D)$	
2.	A $\wedge$ B	
3.	B	$\wedge$ <b>Elim:</b> 2
4.	B $\vee$ D	$\vee$ <b>Intro:</b> 3
5.	C $\wedge$ D	
6.	D	$\wedge$ <b>Elim:</b> 5
7.	B $\vee$ D	$\vee$ <b>Intro:</b> 6
8.	B $\vee$ D	$\vee$ <b>Elim:</b> 1, 2–4, 5–7

33

- |                           |  |
|---------------------------|--|
| $P_1 \vee \dots \vee P_n$ | $\vee$ <b>Beseitigung</b>                  |
| $\vdots$                  | ( $\vee$ Elimination/ $\vee$ <b>Elim</b> ) |
| $P_1$                     | $\vdots$                                   |
| $S$                       |  |
| $\Downarrow$              |  |
| $P_n$                     | $\vdots$                                   |
| $S$                       |  |
| $\vdots$                  |  |
| $\triangleright S$        |  |

34

### NEGATIONSREGELN

- $\neg$  **Beseitigung** ( $\neg$  Elimination/ $\neg$  **Elim**):

$\neg\neg P$
$\vdots$
$\triangleright P$

- Die Regel der  $\neg$  Einführung entspricht der Beweismethode des indirekten Beweises bzw. des Beweises durch Widerspruch.

35

- $\neg$  **Einführung** ( $\neg$  Introdution/ $\neg$  **Intro**)

$P$	$\vdots$
$\perp$	
$\triangleright \neg P$	

- Das „ $\perp$ “ im obigen Schema soll dabei nicht als Abkürzung für einen bestimmten Widerspruch aufgefasst werden, sondern als ein eigenes logisches Symbol.

36

- $\perp$  als logisches Symbol aufzufassen ist in verschiedenen Hinsichten vorteilhaft, allerdings müssen so auch eigene Regeln für  $\perp$  angegeben werden:
- **$\perp$  Einführung ( $\perp$  Introdution/ $\perp$  Intro):**

P	
⋮	
¬P	
⋮	
▷	$\perp$

37

- Wenn die Regel der  $\perp$  Einführung angewandt werden kann, zeigt dies die Inkonsistenz der Ausgangsprämissen. In der Regel wird die Regel im Rahmen eines Unterbeweises eingesetzt werden, in dem eine bestimmte vorübergehende Annahme widerlegt werden soll.
- Kann die Regel auf der Hauptebene des Beweises angewandt werden, zeigt dies die Widersprüchlichkeit von dessen Prämissen. Auf diese Weise kann ein formaler Beweis der Inkonsistenz geführt werden.

38

- *Beispiel:*

1. A ∨ B	
2. ¬A	
3. ¬B	
┌ 4. A	
│ 5. $\perp$	$\perp$ Intro: 4, 2
└ 6. B	
│ 7. $\perp$	$\perp$ Intro: 6, 3
8. $\perp$	$\vee$ Elim: 1, 4–5, 6–7

39

- Die Regel der  $\neg$  Beseitigung entspricht einer ‚Richtung‘ des Prinzips von der doppelten Negation. Die andere Richtung kann nun wie folgt bewiesen werden:

1. A	
┌ 2. ¬A	
│ 3. $\perp$	$\perp$ Intro: 1, 2
4. ¬¬A	$\neg$ Intro: 2–3

40

- Die Regel der  $\perp$  Beseitigung entspricht dem Prinzip *ex falso quodlibet*:
- **$\perp$  Beseitigung ( $\perp$  Elimination/ $\perp$  Elim):**

┌ $\perp$	
│ ⋮	
▷	P

41

- *Beispiel:*

1. P ∨ Q	
2. ¬Q	
┌ 3. P	
│ 4. P	<b>Reit: 3</b>
└ 5. Q	
│ 6. ¬Q	<b>Reit: 2</b>
│ 7. $\perp$	$\perp$ Intro: 5, 6
│ 8. P	$\perp$ Elim: 7
9. P	$\vee$ Elim: 1, 3–4, 5–8

42



- Eigentlich könnten wir auf die Regel der  $\perp$  Beseitigung verzichten, da sie sich bereits aus den anderen Regeln ergibt. Allerdings benötigen wir ohne die Regel mehr Schritte, um einen beliebigen Satz  $P$  aus  $\perp$  herzuleiten (im folgenden Beispiel befindet sich  $\perp$  in Schritt 5):

5. $\perp$	
6. $\neg P$	
7. $\perp$	<b>Reit:</b> 5
8. $\neg\neg P$	$\neg$ <b>Intro:</b> 6–7
9. $P$	$\neg$ <b>Elim:</b> 8

43

- Mit Hilfe der bereits vorgestellten Regeln kann  $\perp$  ausgehend von jeder beliebigen WT-widersprüchlichen Aussagenmenge hergeleitet werden.
- Allerdings können Aussagen auch widersprüchlich sein aufgrund der Bedeutung anderer logischer Ausdrücke (wie  $=$  oder den noch zu besprechenden Quantoren) oder der Bedeutung des nicht-logischen Vokabulars (wie den Prädikaten der Klötzchensprache).

44

- Im ersten Fall folgt  $\perp$  tautologisch aus der fraglichen Aussagenmenge, im zweiten Fall ist  $\perp$  eine PL1-Folgerung der fraglichen Menge und im letzten Fall folgt  $\perp$  analytisch aus der besagten Menge.
- Mit Tarski's World und den Ableitungsverfahren **Taut Con**, **FO Con** und **Ana Con** kann überprüft werden, ob einer dieser drei Fälle vorliegt.

45

## ÜBUNGEN

- Bitte bis zur nächsten Vorlesung vorbereiten: **Kap. 6.4 bis einschließlich Kap. 7** (*Formale Beweise und Boolesche Logik & Konditionale*)!
- Bis zum Tutorium bitte folgende Aufgaben auf Papier lösen und beim Tutor abgeben: 5.5, 5.6, 5.11, 5.12, 5.18, 6.5, 6.9, 6.13, 6.15
- Falls Sie über die Software verfügen, sollten Sie (optional!) auch die „Sie sind dran“-Abschnitte bearbeiten!

46



**VORLESUNG 6**

- Zum adäquaten Gebrauch v. Unterbeweisen 3
- Strategie und Taktik 9
- Beweise ohne Prämissen 14
- Das Symbol f. d. materiale Konditional  $\rightarrow$  16
- Das Symbol für das Bikonditional  $\leftrightarrow$  27
- Konversationale Implikaturen 31
- Wahrheitsfunktionale Vollständigkeit 35
- Übungen 46

**ZUM ADÄQUATEN GEBRAUCH VON UNTERBEWEISEN**

- Die Annahmen eines Unterbeweises sind stets nur *vorübergehend*: Nach Beendigung des Unterbeweises dürfen wir uns nicht mehr auf die Annahmen oder auf Sätze *im* Unterbeweis berufen, die aus ihnen hergeleitet wurden.
- Wir dürfen uns lediglich auf den Unterbeweis *als Ganzen* berufen.

- Auf die Annahmen oder die aus ihnen hergeleiteten Sätze eines noch nicht abgeschlossenen Unterbeweises dürfen wir uns aber berufen, wenn wir *verschachtelte* Unterbeweise führen (d.h. Unterbeweise von Unterbeweisen).
- Ein solcher Bezug auf einen vorangehenden Unterbeweis ist aber nur dann zulässig, wenn dieser noch nicht beendet wurde.

- In einem Unterbeweis darf man sich stets auf Sätze im Hauptbeweis beziehen.
- Im folgenden Beispiel eines *inkorrekten* Beweises wird in Zeile 8 zur Begründung ein Satz (3) aus einem bereits abgeschlossenen Unterbeweis angeführt:

1.	$(B \wedge A) \vee (A \wedge C)$	
2.	$B \wedge A$	
3.	$B$	$\wedge$ <b>Elim:</b> 2
4.	$A$	$\wedge$ <b>Elim:</b> 2
5.	$A \wedge C$	
6.	$A$	$\wedge$ <b>Elim:</b> 5
7.	$A$	$\vee$ <b>Elim:</b> 1, 2-4, 5-6
8.	$A \wedge B$	$\wedge$ <b>Intro:</b> 7, 3

- Im Gegensatz zum Obigen ist das Folgende ein Beispiel eines korrekten Beweises:

1. $\neg(P \wedge Q)$	
2. $\neg(\neg P \vee \neg Q)$	
3. $\neg P$	
4. $\neg P \vee \neg Q$	$\vee$ <b>Intro:</b> 3
5. $\perp$	$\perp$ <b>Intro:</b> 4, 2
6. $\neg\neg P$	$\neg$ <b>Intro:</b> 3-5
7. $P$	$\neg$ <b>Elim:</b> 6
8. $\neg Q$	
9. $\neg P \vee \neg Q$	$\vee$ <b>Intro:</b> 8
10. $\perp$	$\perp$ <b>Intro:</b> 9, 2
11. $\neg\neg Q$	$\neg$ <b>Intro:</b> 8-10

7

12. $Q$	$\neg$ <b>Elim:</b> 11
13. $P \wedge Q$	$\wedge$ <b>Intro:</b> 7, 12
14. $\neg(P \wedge Q)$	<b>Reit:</b> 1
15. $\perp$	$\perp$ <b>Intro:</b> 13, 14
16. $\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$	$\neg$ <b>Intro:</b> 2-15
17. $\neg P \vee \neg Q$	$\neg$ <b>Elim:</b> 16

8

### STRATEGIE UND TAKTIK

1. Machen Sie sich klar, was die Sätze besagen.
2. Überlegen Sie, ob die Konklusion aus den Prämissen folgt.
3. Versuchen Sie ein Gegenbeispiel zu finden, wenn Sie meinen, dass die Konklusion nicht folgt.
4. Versuchen Sie, einen informellen Beweis zu führen, wenn Sie meinen, dass die Konklusion folgt.

9

5. Lassen Sie sich bei der Auffindung eines formalen Beweises vom informellen leiten.
6. Versuchen Sie beim Führen eines Beweises gelegentlich ‚rückwärts‘ vorzugehen.
7. Überprüfen Sie beim Rückwärts-Arbeiten stets, ob die Zwischenschritte aus den Prämissen folgen.

10

▪ *Beispiel:*

- |                         |  |
|-------------------------|--|
| 1. $\neg P \vee \neg Q$ |  |
| 2. $:$                  |  |
| 3. $\neg(P \wedge Q)$   |  |

- |                         |                          |
|-------------------------|--------------------------|
| 1. $\neg P \vee \neg Q$ |                          |
| 2. $P \wedge Q$         |                          |
| 3. $:$                  |                          |
| 4. $\perp$              |                          |
| 5. $\neg(P \wedge Q)$   | $\neg$ <b>Intro:</b> 2-4 |

11

- |                         |   |
|-------------------------|---|
| 1. $\neg P \vee \neg Q$ |   |
| 2. $P \wedge Q$         |   |
| 3. $\neg P$             |   |
| 4. $:$                  |   |
| 5. $\perp$              |   |
| 6. $\neg Q$             |   |
| 7. $:$                  |   |
| 8. $\perp$              |   |
| 9. $\perp$              |   |
| 10. $\neg(P \wedge Q)$  | $\vee$ <b>Elim:</b> 1, 3-5, 6-8<br>$\neg$ <b>Intro:</b> 2-9 |

12

1. $\neg P \vee \neg Q$	
2. $P \wedge Q$	
3. $\neg P$	
4. $P$	$\wedge$ <b>Elim:</b> 2
5. $\perp$	$\perp$ <b>Intro:</b> 3, 4
6. $\neg Q$	
7. $Q$	$\wedge$ <b>Elim:</b> 2
8. $\perp$	$\perp$ <b>Intro:</b> 6, 7
9. $\perp$	$\vee$ <b>Elim:</b> 1, 3–5, 6–8
10. $\neg(P \wedge Q)$	$\neg$ <b>Intro:</b> 2–9

13

### BEWEISE OHNE PRÄMISSEN

- Beweise ohne Prämissen zeigen, dass es sich bei ihrer Konklusion um eine logische Wahrheit handelt (die aus jeder Prämissenmenge—sogar aus der leeren—folgt).

- *Beispiel:*

1. $a = a$	<b>= Intro</b>
2. $b = b$	<b>= Intro</b>
3. $a = a \wedge b = b$	$\wedge$ <b>Intro:</b> 1, 2

14

- *Weiteres Beispiel: Das Prinzip vom ausgeschlossenen Widerspruch*

1. $P \wedge \neg P$	
2. $P$	$\wedge$ <b>Elim:</b> 1
3. $\neg P$	$\wedge$ <b>Elim:</b> 1
4. $\perp$	$\perp$ <b>Intro:</b> 2, 3
5. $\neg(P \wedge \neg P)$	$\neg$ <b>Intro:</b> 1–4

15

### DAS SYMBOL FÜR DAS MATERIALE KONDITIONAL $\rightarrow$

- Mit dem Symbol  $\rightarrow$  soll im Rahmen unserer PL1-Sprache das sog. *materiale Konditional* ausgedrückt werden, das im Deutschen am ehesten dem *wenn ..., dann* entspricht.

16

- Sind P und Q Sätze unserer PL1-Sprache, ist auch  $P \rightarrow Q$  ein Satz unserer Sprache (bei P und Q darf es sich dabei auch um komplexe Sätze handeln).
- Dabei wird P das *Antezedens* und Q das *Konsequens* des Konditionals genannt.

17

- Die *Bedeutung* von  $\rightarrow$  kann mit der folgenden Wahrheitstafel wiedergegeben werden:

P	Q	$P \rightarrow Q$
WAHR	WAHR	WAHR
WAHR	FALSCH	FALSCH
FALSCH	WAHR	WAHR
FALSCH	FALSCH	WAHR

18

- Der Satz  $P \rightarrow Q$  ist somit äquivalent zu  $\neg P \vee Q$ .
- Mit dem Junktor  $\rightarrow$  können allerdings nur bestimmte Verwendungsweisen des umgangssprachlichen *wenn ..., dann* wiedergegeben werden.
- Nicht erfasst werden können etwa sog. *kontrafaktische* Konditionale wie im Falle von:  
*Wenn Max zu Hause wäre, dann wäre Bello auch dort.*

19

- $P \rightarrow Q$  ist aber die bestmögliche *wahrheitsfunktionale* Annäherung an das *indikative* umgangssprachliche *wenn ..., dann*.
- $P \rightarrow Q$  kann demnach auch gelesen werden als *Q gegeben, dass P* bzw. *Q, falls P*. Ebenfalls kann  $P \rightarrow Q$  gelesen werden als *P nur dann, wenn Q* (in letzterem Falle ist besonders auf die Reihenfolge von P und Q zu achten!)

20

- Im Falle eines wahren Satzes  $P \rightarrow Q$  bezeichnet man P als *hinreichende Bedingung* für Q und Q als *notwendige Bedingung* für P.
- Im Falle von  $P \rightarrow Q$  ist P *hinreichend* für Q in dem Sinne, dass das Zutreffen von P hinreicht bzw. dafür genügt, dass auch Q zutrifft.
- *Beispiel:* Zum Kauf einer Zeitung genügt es, den Kaufpreis zu entrichten—Sie müssen keine weiteren Bedingungen erfüllen. Das Entrichten des Kaufpreises ist somit eine *hinreichende* Bedingung für den Erwerb.

21

- Ist  $P \rightarrow Q$  wahr, so ist Q *notwendig* für P in dem Sinne, dass *ohne* das Zutreffen von Q auch P nicht zutreffen kann.
- In diesem Kurs ist etwa das Bestehen der Abschlussklausur eine *notwendige* Bedingung für den Erwerb der vollen Leistungspunktzahl.
- Das Bestehen der Abschlussklausur ist aber *keine hinreichende* Bedingung, da auch noch Ihre Anwesenheit nötig ist. Auch die Anwesenheit ist somit eine *notwendige* Bedingung, keine der beiden ist aber allein hinreichend.

22

- Angenommen, Sie können in einem Seminar Ihre Leistungspunkte durch eine Hausarbeit oder durch ein Referat erwerben.
- Dann ist sowohl das Halten eines Referats als auch das Verfassen einer Hausarbeit jeweils hinreichend für den Erwerb der Leistungspunkte, aber keine der beiden Bedingungen ist für sich genommen notwendig, um die Leistungspunkte zu erwerben.

23

- Mit Hilfe von  $\rightarrow$  können auch die umgangssprachlichen wahrheitsfunktionalen Junktoren *es sei denn* und *sofern nicht* in nahe liegender Weise ausgedrückt werden:
- Q *sofern nicht* P und Q *es sei denn, dass* P sind unter denselben Umständen wahr wie Q *wenn nicht* P; sie können daher durch  $\neg P \rightarrow Q$  ausgedrückt werden.

24

- Eine Aussage  $Q$  folgt logisch aus einer endlichen Menge von Aussagen  $P_1, \dots, P_n$  genau dann, wenn  $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$  eine logische Wahrheit ist.
- So folgt  $Q$  logisch aus  $P_1, \dots, P_n$ , wenn es nicht möglich ist, dass jede der Aussagen  $P_1, \dots, P_n$  (und damit auch  $P_1 \wedge \dots \wedge P_n$ ) wahr ist,  $Q$  aber falsch ist—d.h. genau dann, wenn  $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$  logisch wahr ist.

25

- Dass  $Q$  eine tautologische Folgerung aus  $P_1, \dots, P_n$  ist, kann demnach auch dadurch gezeigt werden, dass man die Aussage  $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n) \rightarrow Q$  als Tautologie erweist (mit Hilfe einer entsprechenden Wahrheitstafel).

26

- DAS SYMBOL FÜR DAS BIKONDITIONAL  $\leftrightarrow$**
- 
- Mit dem Symbol  $\leftrightarrow$  wird im Rahmen unserer PL1-Sprache das sog. *Bikonditional* ausgedrückt. Dieses wird umgangssprachlich mit Wendungen wie *dann und nur dann wenn* oder *genau dann wenn* (abgekürzt: *gdw.*—im Englischen *iff* für *if and only if*).

27

- Sind  $P$  und  $Q$  Sätze unserer PL1-Sprache, ist auch  $P \leftrightarrow Q$  ein Satz unserer Sprache (bei  $P$  und  $Q$  darf es sich dabei auch um komplexe Sätze handeln).
- Die *Bedeutung* von  $\leftrightarrow$  kann mit der folgenden Wahrheitstafel wiedergegeben werden:

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
WAHR	WAHR	WAHR
WAHR	FALSCH	FALSCH
FALSCH	WAHR	FALSCH
FALSCH	FALSCH	WAHR

28

- Der Satz  $P \leftrightarrow Q$  ist somit äquivalent zu  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ .
- Die Sätze  $P$  und  $Q$  sind logisch äquivalent genau dann, wenn es nicht sein kann, dass der eine wahr, der andere falsch ist—also genau dann, wenn  $P \leftrightarrow Q$  logisch wahr ist.
- Es gilt also  $P \Leftrightarrow Q$  genau dann, wenn  $P \leftrightarrow Q$  logisch wahr ist.

29

- Dass  $P$  und  $Q$  tautologisch äquivalent sind, kann demnach auch dadurch gezeigt werden, dass man die Aussage  $P \leftrightarrow Q$  als Tautologie erweist (mit Hilfe einer entsprechenden Wahrheitstafel).

30

### KONVERSATIONALE IMPLIKATUREN

- Manchmal ist man geneigt, Sätze der Form  $P \rightarrow Q$  im Sinne von  $P \leftrightarrow Q$  zu verstehen: So könnte man den Satz *Wenn Max krank ist, kommt Anne nicht zur Party* im Sinne eines Bikonditionals verstehen, so dass mit dem Satz auch noch gesagt wird: Wenn Max *nicht* krank ist, kommt Anne zur Party.

31

- Letzteres ist aber nicht Teil der Satzbedeutung, sondern eine sog. *konversationale Implikatur*. Die Theorie der konversationalen Implikaturen geht zurück auf den Philosophen H. P. GRICE. Bei einer solchen Implikatur handelt es sich um eine Folgerung, die wir aufgrund der Behauptung eines Satzes ziehen.

32

- Im Gegensatz zu logischen Folgerungen können Implikaturen *aufgehoben* werden dadurch, dass man die Implikatur explizit bestreitet. So kann man sagen:  
*Wenn Max krank ist, kommt Anne nicht zur Party, aber es ist auch nicht gesagt, dass sie kommt, wenn Max nicht krank ist.*

33

- Logische Folgerungen können nicht in diesem Sinne aufgehoben werden (ohne dass der resultierende Satz selbstwidersprüchlich würde):  
*Es regnet und es ist kalt, aber es regnet nicht.*
- Auch unsere Neigung, das einschließende Oder als ausschließendes zu interpretieren, kann mit Hilfe der Theorie der Implikaturen erklärt werden.

34

### WAHRHEITSFUNKTIONALE VOLLSTÄNDIGKEIT

- Wie erwähnt sind nicht alle Junktoren bzw. Satzoperatoren des Deutschen wahrheitsfunktional: Ein nicht-wahrheitsfunktionaler Junktor ist beispielsweise *weil*, ein nicht-wahrheitsfunktionaler Satzoperator ist etwa *es ist notwendig, dass*.

35

- So sind etwa die Sätze  $2 + 2 = 4$  und *Die Logik-Einführung ist ein Pflicht-Kurs* beide wahr. Allerdings ist der Satz *Es ist notwendig, dass die Logik-Einführung ein Pflicht-Kurs ist* falsch, während der Satz *Es ist notwendig, dass  $2 + 2 = 4$*  wahr ist.

36

- Gibt es auch wahrheitsfunktionale Junktoren, die wir (noch) nicht ausdrücken können? Dem ist nicht so. Wie sich zeigen wird, ist es nicht erforderlich, unserer Sprache weitere Junktoren hinzuzufügen.
- Bereits  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  wären nicht zwingend nötig gewesen und dienen in erster Linie zur Vereinfachung von Beweisen und Ausdrücken.

37

- Jede Wahrheitsfunktion kann im Rahmen einer Wahrheitstafel dargestellt werden. Im Falle von zweistelligen Junktoren gibt es  $2^4 = 16$  unterschiedliche Wahrheitstafeln. (Die Wahrheitstafel besitzt 4 Zeilen; pro Zeile gibt es 2 Möglichkeiten, diese auszufüllen: WAHR oder FALSCH.)

38

- Beispielsweise kann das ausschließende Oder durch die folgende Wahrheitstafel beschrieben werden:

P	Q	Entweder P oder Q
WAHR	WAHR	FALSCH
WAHR	FALSCH	WAHR
FALSCH	WAHR	WAHR
FALSCH	FALSCH	FALSCH

- Entweder P oder Q kann ausgedrückt werden durch:  $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$  (oder durch  $\neg(P \leftrightarrow Q)$ ).

39

- Im Allgemeinen sieht die Wahrheitstafel für einen zweistelligen Junktor  $\star$  wie folgt aus:

P	Q	P $\star$ Q
WAHR	WAHR	<i>1. Wert</i>
WAHR	FALSCH	<i>2. Wert</i>
FALSCH	WAHR	<i>3. Wert</i>
FALSCH	FALSCH	<i>4. Wert</i>

40

- Die Wahrheitsfunktion  $P \star Q$  kann nun mit Hilfe von  $\wedge$ ,  $\vee$  und  $\neg$  ausgedrückt werden: Wir betrachten für jede Zeile  $n$ , die unter  $P \star Q$  den Wert WAHR enthält, die entsprechende Konjunktion:

- $C_1 = (P \wedge Q)$
- $C_2 = (P \wedge \neg Q)$
- $C_3 = (\neg P \wedge Q)$
- $C_4 = (\neg P \wedge \neg Q)$

41

- Wir bilden dann eine Disjunktion aus denjenigen  $C_n$ , in deren entsprechender Zeile wahr steht. (Falls alle vier Werte falsch sind, ist die gesuchte Formel  $P \wedge \neg P \wedge Q \wedge \neg Q$ )
- Auf entsprechende Weise können auch alle möglichen einstelligen Satzoperatoren sowie Junktoren mit mehr als zwei Stellen ausgedrückt werden. So auch der Junktor  $\clubsuit$ :

42



A	B	C	$\clubsuit(A, B, C)$
W	W	W	W
W	W	F	W
W	F	W	F
W	F	F	F
F	W	W	W
F	W	F	F
F	F	W	W
F	F	F	F

43

- $\clubsuit(A, B, C)$  kann durch die folgende Formel wiedergegeben werden:  

$$(A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$$
- Eine Menge von Junktoren heißt *wahrheitsfunktional vollständig*, wenn man mit den Junktoren dieser Menge jede beliebige Wahrheitsfunktion ausdrücken kann.
- Die obigen Überlegungen zeigen, dass die Booleschen Junktoren  $\neg, \wedge, \vee$  wahrheitsfunktional vollständig sind.

44

- Wegen  $(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$  und  $(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$  wissen wir auch, dass bereits die Mengen  $\{\neg, \wedge\}$  und  $\{\neg, \vee\}$  wahrheitsfunktional vollständig sind.
- Bereits die Menge, die als einzigen Junktor das *weder ..., noch* („ $\downarrow$ “) beinhaltet, ist wahrheitsfunktional vollständig:  $\neg P$  entspricht  $P \downarrow P$  und  $P \wedge Q$  entspricht  $(P \downarrow P) \downarrow (Q \downarrow Q)$ .

45

## ÜBUNGEN

- Bitte bis zur nächsten Vorlesung vorbereiten: **Kapitel 8** (*Die Logik der Konditionale*)!
- Bis zum Tutorium bitte folgende Aufgaben auf Papier lösen und beim Tutor abgeben:  
6.20, 6.26, 6.35, 6.38, 7.3, 7.14, 7.17, 7.19, 7.22  
(die Sätze/Welten zur Lösung von 7.14 & 7.17 finden Sie unter „Aufgaben 5“ im Internet!)
- Falls Sie über die Software verfügen, sollten Sie (optional!) auch die „Sie sind dran“-Abschnitte bearbeiten!

46



## VORLESUNG 7

- Die Logik der Konditionale 3
- Formale Beweisregeln für  $\rightarrow$  und  $\leftrightarrow$  11
- Korrektheit und Vollständigkeit 20
- Exkurs: Semantische Paradoxien 30
- Übungen 37

2

### DIE LOGIK DER KONDITIONALE

- Die bekannteste Schlussregel im Zusammenhang mit dem Konditional dürfte der *Modus ponens* sein: Sind  $P \rightarrow Q$  und  $P$  wahr, so muss auch  $Q$  wahr sein.
- Im Rahmen des formalen Systems  $\mathcal{F}$  entspricht dieser Regel die  $\rightarrow$ -Beseitigung.

3

- Aufgrund der Äquivalenz von  $P \leftrightarrow Q$  und  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$  überrascht es nicht, dass eine entsprechende Regel auch für  $\leftrightarrow$  gilt: Von  $P \leftrightarrow Q$  (oder  $Q \leftrightarrow P$ ) und  $P$  kann auf  $Q$  geschlossen werden.
- Im Rahmen des formalen Systems  $\mathcal{F}$  entspricht dieser Regel die  $\leftrightarrow$ -Beseitigung.

4

- Um einen Satz der Form  $P \rightarrow Q$  (evtl. aus bestimmten Annahmen) nachzuweisen, ist  $P$  vorübergehend als Annahme anzunehmen und damit  $Q$  herzuleiten. Dies bezeichnet man als *konditionalen Beweis*.
- Ist dies gelungen, kann  $Q$  nicht falsch sein, wenn  $P$  wahr ist—weshalb dann aber auch  $P \rightarrow Q$  nicht falsch sein kann.
- Im Rahmen des formalen Systems  $\mathcal{F}$  entspricht dieser Regel die  $\rightarrow$ -Einführung.

5

- Beispiel: Wir wollen zeigen, dass  $P \rightarrow R$  gilt, vorausgesetzt  $P \rightarrow Q$  und  $Q \rightarrow R$  sind der Fall (die sog. *Transitivität des Konditionals*).
- Zum Zwecke eines konditionalen Beweises nehmen wir  $P$  an. Aufgrund der ersten Prämisse  $P \rightarrow Q$  gilt dann auch  $Q$  (wegen *Modus ponens*). Dann kann aber der *Modus ponens* mit der zweiten Prämisse  $Q \rightarrow R$  erneut angewendet und auf  $R$  geschlossen werden. Damit haben wir gezeigt, dass  $P \rightarrow R$  gilt.

6

- Aufgrund der Äquivalenz von  $P \leftrightarrow Q$  und  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$  überrascht es wiederum nicht, dass wir, um  $P \leftrightarrow Q$  zu beweisen, sowohl  $P \rightarrow Q$  als auch  $Q \rightarrow P$  zu beweisen haben.
- Im Rahmen des formalen Systems  $\mathcal{F}$  entspricht dieser Regel die  $\leftrightarrow$  Einführung.

- Will man die Äquivalenz etwa der drei Bedingungen  $Q_1, Q_2$  und  $Q_3$  beweisen, ist zu zeigen, dass  $Q_1 \leftrightarrow Q_2, Q_2 \leftrightarrow Q_3$  und  $Q_3 \leftrightarrow Q_1$  gilt. Mit dem obigen Verfahren liefe dies auf sechs Beweise von Konditionalen hinaus.
- In diesem Fall genügt es allerdings, *drei* Konditionale zu beweisen: Etwa  $Q_1 \rightarrow Q_2, Q_2 \rightarrow Q_3$  und  $Q_3 \rightarrow Q_1$ . Die übrigen erforderlichen Konditionale ergeben sich aufgrund der Transitivität von  $\rightarrow$ .

- Unter Umständen kann es einfacher sein, anstelle eines Konditionals  $P \rightarrow Q$  eine äquivalente Aussage zu beweisen. So gelten etwa die folgenden Äquivalenzen:
- $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
- $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- $\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
- $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$

- Aufgrund der ersten Äquivalenz  $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$  kann man  $P \rightarrow Q$  also auch dadurch beweisen, dass man  $\neg Q$  annimmt und damit  $\neg P$  herleitet.
- Dabei bezeichnet man  $\neg Q \rightarrow \neg P$  als *Kontraposition* bzw. als *Kontrapositives* von  $P \rightarrow Q$ .
- Aufgrund der letzten Äquivalenz  $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$  kann man  $P \rightarrow Q$  auch dadurch beweisen, dass man die Annahme  $P \wedge \neg Q$  zu einem Widerspruch führt.

**FORMALE BEWEISREGELN FÜR  $\rightarrow$  UND  $\leftrightarrow$**

---

- $\rightarrow$  **Beseitigung** ( $\rightarrow$  Elimination/ $\rightarrow$  **Elim**):

$$\begin{array}{l} | \quad P \rightarrow Q \\ | \quad \vdots \\ | \quad P \\ | \quad \vdots \\ \triangleright | \quad Q \end{array}$$

- $\rightarrow$  **Einführung** ( $\rightarrow$  Introdution/ $\rightarrow$  **Intro**)

$$\begin{array}{l} | \quad | \quad P \\ | \quad | \quad \vdots \\ | \quad | \quad Q \\ \triangleright | \quad P \rightarrow Q \end{array}$$

▪ *Beispiel:*

1. A	
2. $\neg A$	
3. $\perp$	$\perp$ <b>Intro:</b> 1, 2
4. $\neg\neg A$	$\neg$ <b>Intro:</b> 2-3
5. $A \rightarrow \neg\neg A$	$\rightarrow$ <b>Intro:</b> 1-4

13

- Berücksichtigt man im obigen Beweis nur die Schritte 1 bis 4, zeigt der Beweis, dass man aufgrund der Annahme A die Aussage  $\neg\neg A$  beweisen kann.
- Sind A und B Sätze und ist B aufgrund der Annahme A herleitbar, schreibt man auch:  $A \vdash B$ . Ein Beweis, der zeigt, dass  $A \vdash B$  (z.B. die Schritte 1-4 oben), kann in einen Beweis überführt werden, der zeigt, dass  $\vdash A \rightarrow B$  (dies geschieht oben in Schritt 5).

14

- Im Allgemeinen schreibt man  $A_1, \dots, A_n \vdash B$  und es gilt, dass ein entsprechender Beweis zu einem Beweis umgewandelt werden kann, der zeigt, dass
- $\vdash A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (\dots \rightarrow (A_n \rightarrow B)))$
- bzw. dass
- $\vdash (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$

15

▪  $\leftrightarrow$  **Beseitigung** ( $\leftrightarrow$  Elimination/ $\leftrightarrow$  **Elim**):

P $\leftrightarrow$ Q (oder Q $\leftrightarrow$ P)
⋮
P
⋮
Q

▷

16

▪  $\leftrightarrow$  **Einführung** ( $\leftrightarrow$  Introdution/ $\leftrightarrow$  **Intro**)

P
⋮
Q
⋮
Q
⋮
P

▷ P  $\leftrightarrow$  Q

17

▪ *Beispiel:*  $\vdash (P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$

1. P $\rightarrow$ Q	
2. $\neg Q$	
3. P	$\rightarrow$ <b>Elim:</b> 1, 3
4. Q	$\perp$ <b>Intro:</b> 2, 4
5. $\perp$	$\neg$ <b>Intro:</b> 3-5
6. $\neg P$	
7. $\neg Q \rightarrow \neg P$	$\rightarrow$ <b>Intro:</b> 2-6

18

8.	$\neg Q \rightarrow \neg P$	
9.	P	
10.	$\neg Q$	
11.	$\neg P$	$\rightarrow$ <b>Elim:</b> 8, 10
12.	$\perp$	$\perp$ <b>Intro:</b> 9, 11
13.	$\neg\neg Q$	$\neg$ <b>Intro:</b> 10–12
14.	Q	$\neg$ <b>Elim:</b> 13
15.	$P \rightarrow Q$	$\rightarrow$ <b>Intro:</b> 9–14
16.	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$	$\leftrightarrow$ <b>Intro:</b> 1–7, 8–15

19

### KORREKTHEIT UND VOLLSTÄNDIGKEIT

- Als  $\mathcal{F}_T$  wollen wir den Teil unseres deduktiven Systems  $\mathcal{F}$  bezeichnen, der nur die Regeln für die Symbole  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  und  $\perp$  enthält.  $\mathcal{F}_T$  ist der sog. *aussagenlogische* Teil von  $\mathcal{F}$ .

20

- Entsprechend soll  $P_1, \dots, P_n \vdash_T S$  besagen, dass es einen aussagenlogischen Beweis von S ausgehend von den Prämissen  $P_1, \dots, P_n$  gibt (also einen Beweis, der nur die Regeln für  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  und  $\perp$  verwendet).
- Zwei wichtige Eigenschaften des Systems  $\mathcal{F}_T$  sind seine *Korrektheit* sowie seine *Vollständigkeit*.

21

Zum einen ist  $\mathcal{F}_T$  *korrekt*; d.h.:

- Wenn  $P_1, \dots, P_n \vdash_T S$  gilt, dann ist S eine tautologische Folgerung aus  $P_1, \dots, P_n$ .
- Insbesondere gilt: Wenn  $\vdash_T S$ , dann ist S eine Tautologie.

Zum anderen ist  $\mathcal{F}_T$  *vollständig*; d.h.:

- Wenn S eine tautologische Folgerung aus  $P_1, \dots, P_n$  ist, dann gilt auch  $P_1, \dots, P_n \vdash_T S$ .
- Insbesondere gilt: Wenn S eine Tautologie ist, dann gilt auch  $\vdash_T S$ .

22

- Beim Beweis der Korrektheit zeigt man, dass in einem Beweis jeder Schritt eine tautologische Folgerung der gerade geltenden Prämissen ist.
- Der Beweis verfährt indirekt: Man nimmt an, dass es einen (ersten) ungültigen Schritt in einem Beweis gibt (der also nicht aus den Prämissen tautologisch folgt). Diese Annahme führt man dann zu einem Widerspruch.

23

- Der erste ungültige Schritt muss durch eine der Regeln von  $\mathcal{F}_T$  gerechtfertigt worden sein. Das kann aber nicht sein. Dies muss allerdings für jede einzelne Regel gezeigt werden (im Rahmen einer Fallunterscheidung). Im Folgenden nur ein Fall:

24

- Angenommen, im ersten ungültigen Schritt würde der Satz  $Q$  mit  $\rightarrow$  **Elim** hergeleitet. Dann müssen vorher im Beweis die Sätze  $P \rightarrow Q$  und  $P$  auftreten, die aus den Prämissen tautologisch folgen. Dann folgt aber auch  $Q$  tautologisch aus den Prämissen:
- Es kann keine Zeile einer gemeinsamen Wahrheitstafel geben, in der alle Prämissen wahr sind,  $Q$  aber falsch ist; in einer solchen Zeile wären auch  $P \rightarrow Q$  und  $P$  wahr und somit auch  $Q$ .

25

- Sowohl die Eigenschaft der Korrektheit als auch die der Vollständigkeit können praktisch eingesetzt werden: Selbst wenn wir keinen Beweis von  $S$  ausgehend von den Prämissen  $P_1, \dots, P_n$  finden können, können wir mit Hilfe einer entsprechenden Wahrheitstafel feststellen, ob  $S$  eine tautologische Folgerung aus  $P_1, \dots, P_n$  ist.

26

- Falls es sich um eine tautologische Folgerung handelt, gibt es einen Beweis (wegen der Vollständigkeit), falls nicht, gibt es keinen Beweis (wegen der Korrektheit).
- Ob es einen Beweis von  $S$  ausgehend von  $P_1, \dots, P_n$  gibt, kann daher im Rahmen von Tarski's World mit Hilfe von **TautCon** überprüft werden.

27

- Allerdings zeigt die Korrektheit von  $\mathcal{F}_T$  auch eine Form von *Unvollständigkeit* von  $\mathcal{F}_T$  auf (allerdings in einem anderen als dem obigen Sinne): Wir können eben *nur* tautologische Folgerungen beweisen und nicht auch Folgerungsbeziehungen, die sich aufgrund der Bedeutungen anderer Symbole ergeben (wie etwa  $=$ ).

28

- Klare Fälle von tautologischen Folgerungen können wir aufgrund der Vollständigkeit auch in Beweisen verwenden. Z.B. im Falle der doppelten Negation, des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten oder im Falle von de Morganschen Äquivalenzen. (Natürlich sollten Sie mit **TautCon** nicht einschriftige Beweise begründen.) Ein akzeptables Beispiel:

- |    |                         |              |
|----|-------------------------|--------------|
| :  |                         |              |
| 7. | $\neg(P \wedge \neg Q)$ |              |
| 8. | $\neg P \vee Q$         | <b>Taut.</b> |

29

### **EXKURS: SEMANTISCHE PARADOXIEN**

- Vom Wahrheitsbegriff nimmt man an, dass er alle Instanzen des sog. W-Schemas erfüllt:

$$W(\ulcorner P \urcorner) \leftrightarrow P$$

(„ $\ulcorner P \urcorner$ “ ist dabei eine Bezeichnung für den Satz  $P$ .) —  $C$  sei der Satz:

$$W(\ulcorner C \urcorner) \rightarrow \text{es gibt den Nikolaus}$$

$C$  besagt also in etwa: „Wenn dieser Satz wahr ist, dann gibt es den Nikolaus.“

30

- Der Satz „es gibt den Nikolaus“ wird im Folgenden abgekürzt durch N. Nun gilt:

1.	$W(\ulcorner C \urcorner) \leftrightarrow (W(\ulcorner C \urcorner) \rightarrow N)$	<b>W-Schema</b>
2.	$W(\ulcorner C \urcorner)$	
3.	$W(\ulcorner C \urcorner) \rightarrow N$	$\leftrightarrow$ <b>Elim:</b> 1, 2
4.	N	$\rightarrow$ <b>Elim:</b> 2, 3
5.	$W(\ulcorner C \urcorner) \rightarrow N$	$\rightarrow$ <b>Intro:</b> 2–4
6.	$W(\ulcorner C \urcorner)$	$\leftrightarrow$ <b>Elim:</b> 1, 5
7.	N	$\rightarrow$ <b>Elim:</b> 5, 6

31

- Mit Hilfe des obigen Beweises können *beliebige* Sätze nachgewiesen werden (man kann für N jeden beliebigen Satz einsetzen). Dass *alles* nachgewiesen werden kann, ist freilich nicht akzeptabel.
- Im Falle einer solchen scheinbar unannehmbaren Schlussfolgerung, die aus scheinbar annehmbaren Prämissen mit scheinbar annehmbaren Schlussregeln hergeleitet werden kann, spricht man von einer Paradoxie (vgl. R. M. SAINSBURY, *Paradoxien*, Stuttgart 1993, S. 7–8).

32

- Spielen bei der Herleitung einer Paradoxie *semantische Begriffe* wie der Wahrheitsbegriff im obigen Fall eine wesentliche Rolle, spricht man von einer *semantischen Paradoxie*.
- Auf die Möglichkeit von Beweisen wie dem obigen wurde 1942 von Haskell B. CURRY hingewiesen. Demgemäß werden entsprechende Paradoxien auch *Curry-Paradoxien* genannt.

33

- Die älteste und wohl berühmteste semantische Paradoxie ist das sog. *Lügnerparadox*. Eine Version beruht auf dem Satz „Dieser Satz ist nicht wahr“:
- Wäre der Satz wahr, wäre der Fall, was der Satz besagt und der Satz somit nicht wahr. Wäre der Satz aber nicht wahr, müsste der Satz, da er gerade dies besagt, wahr sein. Der Lügnersatz ist somit wahr genau dann, wenn er nicht wahr ist—ein Widerspruch!

34

- Die Geschichte der Lügnerparadoxie reicht über 2000 Jahre zurück. Ihr Ursprung wird oftmals in einer Passage eines Briefes des Apostels Paulus an Titus vermutet:
- Es hat einer von ihnen gesagt, ihr eigener Prophet:  
Die Kreter sind immer Lügner, böse Tiere und faule Bäume.  
Dieses Zeugnis ist wahr.* Titus 1,12–13

35

- Bislang gibt es keine allgemein akzeptierte ‚Lösung‘ der semantischen Paradoxien.
- Da man sicherlich *nicht* alles beweisen kann, könnte man vermuten, dass das W-Schema falsch ist, oder man könnte annehmen, dass die selbstreferentiellen Sätze (wie der Lügnersatz) sich in irgendeinem syntaktischen oder semantischen Sinne grundlegend von anderen Sätzen unterscheiden (z.B. könnten sie *weder* wahr *noch* falsch sein) usw.

36

**ÜBUNGEN**

---

- Bitte bis zur nächsten Vorlesung vorbereiten:  
**Kapitel 9** (*Einführung in die Quantifikation*)!
- Bis zum Tutorium bitte folgende Aufgaben auf Papier lösen und beim Tutor abgeben:  
8.2, 8.10, 8.19, 8.22, 8.26, 8.28, 8.37, 8.48, 8.51  
(die Sätze zur Lösung von 8.2 & 8.10 finden Sie unter „Aufgaben 6“ im Internet!)
- Falls Sie über die Software verfügen, sollten Sie (optional!) auch die „Sie sind dran“-Abschnitte bearbeiten!

37





**VORLESUNG 8**

- Einführung in die Quantifikation 3
- Variablen und atomare Wffs 7
- Die Quantorensymbole:  $\forall, \exists$  10
- Die Semantik der Quantoren 20
- Die vier Aristotelischen Formen 27
- Komplexe Nominalphrasen übersetzen 29
- Konvers. Implikaturen & Quantifikation 33
- Quantoren und Funktionssymbole 37
- Zur Abschlussklausur 40, Übungen 42

**EINFÜHRUNG IN DIE QUANTIFIKATION**

- Viele logische Folgerungen können nicht mit aussagenlogischen Mitteln erfasst werden. Dies gilt etwa für Schlüsse, die aufgrund der Bedeutung bestimmter quantifizierender Ausdrücke gelten, wie dem folgenden:
  - Alle Menschen sind sterblich.
  - Sokrates ist ein Mensch.
  - Sokrates ist sterblich.

- Im Falle dieses Schlusses ist es bereits aufgrund der Bedeutung von *alle* ausgeschlossen, dass die Prämissen wahr sein können, während die Konklusion falsch ist. Umgangssprachliche Ausdrücke wie *alle, einige, die meisten, genau drei* werden als *Determinatoren* bezeichnet.
- Dass im Falle des soeben besprochenen Schlusses die Bedeutung des Determinators entscheidend ist, zeigt sich auch daran, dass entsprechende Schlüsse mit anderen Determinatoren *nicht* gültig sind:

- Viele Menschen sind sterblich.
- Sokrates ist ein Mensch.
- Sokrates ist sterblich.
- Kein Mensch ist sterblich.
- Sokrates ist ein Mensch.
- Sokrates ist sterblich.

- Während es in der Umgangssprache viele verschiedene quantifizierende Ausdrücke gibt, verfügt unsere PL1-Sprache nur über zwei sog. *Quantoren*, den sog. *Allquantor*  $\forall$  sowie den sog. *Existenzquantor*  $\exists$ , mit denen viele umgangssprachliche quantifizierende Ausdrücke wiedergegeben werden können—allerdings können wir auf diese Weise nicht alle umgangssprachlichen quantifizierenden Ausdrücke wiedergeben.

**VARIABLEN UND ATOMARE WFFS**

- Um Quantifikationen in unserer PL1-Sprache ausdrücken zu können, benötigen wir neben den Symbolen  $\forall$  und  $\exists$  noch ein weiteres Hilfsmittel, nämlich die sog. *Variablen*.
- Als Variablen verwenden wir die Buchstaben t, u, v, w, x, y und z (mit oder ohne Subskript), so dass wir unendlich viele Variablen zur Verfügung haben.

7

- Syntaktisch gesehen sind Variablen *Terme* und verhalten sich wie Individuenkonstanten bzw. Namen. Insbesondere können Variablen anstelle von Namen in komplexen Termen sowie in Sätzen eingesetzt werden:
- So sind nicht nur  $\text{vater}(\text{max})$  sowie  $(0 + 1) \times 1$  Terme, sondern auch  $\text{vater}(x)$  und  $(y + z) \times z$ .
- Entsprechend sind nicht nur  $\text{Zuhause}(\text{max})$  und  $\text{Größer}(\text{max}, \text{hans})$  wohlgeformt, sondern auch  $\text{Zuhause}(x)$  und  $\text{Größer}(x, y)$ .

8

- Semantisch gesehen verhalten sich Variablen allerdings anders als Namen und referieren nicht auf ein bestimmtes Ding; vielmehr sind sie Platzhalter für irgendwelche Dinge.
- Daher ergibt die Einsetzung von Variablen für Namen in atomare Sätzen auch nicht wiederum atomare Sätze: Ausdrücke wie  $\text{Zuhause}(x)$  und  $\text{Größer}(x, y)$  nennt man *atomare Formeln*, oder *atomare Wffs* (*wohl geformte Formeln*), sie sind weder wahr noch falsch.

9

**DIE QUANTORENSYMBOLE:  $\forall, \exists$** 

- Mit Hilfe der Quantorensymbole  $\forall$  und  $\exists$  können aus atomaren Formeln wiederum (wahre oder falsche) Sätze gebildet werden.
- Die Symbole  $\forall$  und  $\exists$  treten dabei stets zusammen mit einer Variablen auf. Man spricht daher von einem *Variablenbindenden Operator*. „ $\forall x$ “ besagt dabei soviel wie *für jedes Ding x* und „ $\exists x$ “ besagt soviel wie *für mindestens ein Ding x*.

10

- Stellt man einen solchen Quantor vor eine atomare Formel wie  $\text{Zuhause}(x)$ , ergibt sich ein neuer Satz:  $\forall x \text{Zuhause}(x)$ , der soviel besagt wie *Für jedes Ding x gilt, dass es zu Hause ist* bzw. *Alles ist zu Hause*.
- Mit diesem Satz wird eine Aussage über *alles* gemacht, es handelt sich um eine sog. *unbeschränkte Allquantifikation*. Will man nur eine Aussage machen über alle Objekte eines bestimmten Typs, kann eine sog. *beschränkte Allquantifikation* verwendet werden:

$$\forall x (\text{Doktor}(x) \rightarrow \text{Klug}(x))$$

11

- Entsprechend besagt  $\exists x \text{Zuhause}(x)$  soviel wie *Für mindestens ein Ding x gilt, dass es zu Hause ist* bzw. *Etwas ist zu Hause*.
- Eine *beschränkte Existenzquantifikation* kann nun wie folgt ausgedrückt werden:

$$\exists x (\text{Doktor}(x) \wedge \text{Klug}(x))$$

12

- Im Rahmen beschränkter Quantifikationen werden Quantoren auf Ausdrücke wie  

$$\text{Doktor}(x) \wedge \text{Klug}(x)$$
angewandt, die zu den (nicht-atomaren) Formeln bzw. Wffs gehören.
- Im Folgenden soll der Begriff einer (*wohlgeformten*) *Formel* bzw. kurz *Wff* näher erläutert werden.

13

- Eine *atomare Formel* bzw. *atomare Wff* besteht aus einem  $n$ -stelligen Prädikat, gefolgt von  $n$ -vielen Termen (Namen oder Variablen). Variablen in atomaren Wffs werden auch *frei* oder *ungebunden* genannt.
- Aus atomaren Wffs können mit Hilfe der Junktoren und der Quantoren komplexe Wffs aufgebaut werden.

14

- Ist  $P$  eine Wff, dann auch  $\neg P$ .
- Sind  $P_1, \dots, P_n$  Wffs, dann ist auch  $(P_1 \wedge \dots \wedge P_n)$  eine Wff.
- Sind  $P_1, \dots, P_n$  Wffs, dann ist auch  $(P_1 \vee \dots \vee P_n)$  eine Wff.
- Sind  $P$  und  $Q$  Wffs, dann ist auch  $(P \rightarrow Q)$  eine Wff.
- Sind  $P$  und  $Q$  Wffs, dann ist auch  $(P \leftrightarrow Q)$  eine Wff.

15

- Wenn  $P$  eine Wff und  $\nu$  eine Variable ist, dann ist  $\forall \nu P$  eine Wff, und jedes Vorkommen von  $\nu$  in  $\forall \nu P$  ist gebunden.
- Wenn  $P$  eine Wff und  $\nu$  eine Variable ist, dann ist  $\exists \nu P$  eine Wff, und jedes Vorkommen von  $\nu$  in  $\exists \nu P$  ist gebunden.
- Ein Satz ist eine Wff ohne ungebundene (bzw. freie) Variablen.

16

- So sind etwa  $\text{Cube}(x)$ ,  $\text{Small}(x)$  und  $\text{LeftOf}(x, y)$  atomare Wffs.
- Wegen der zweiten Regel ist dann auch  $\text{Cube}(x) \wedge \text{Small}(x)$  eine Wff.
- Wegen der siebten Regel ist dann auch  $\exists y \text{LeftOf}(x, y)$  eine Wff.
- Dann ist wegen Regel vier auch  

$$(\text{Cube}(x) \wedge \text{Small}(x)) \rightarrow \exists y \text{LeftOf}(x, y)$$
eine Wff.

17

- In allen obigen Wffs gibt es freie Variablen, so dass keine der obigen Formeln ein Satz ist. Einen Satz erhält man aus der letzten Formel etwa durch die Voranstellung eines Allquantors:  

$$\forall x ((\text{Cube}(x) \wedge \text{Small}(x)) \rightarrow \exists y \text{LeftOf}(x, y))$$
- Mit Klammern zeigt man dabei den sog. *Skopus* bzw. *Wirkungsbereich* eines Quantors an.

18

- Auch können mit Hilfe von Klammern Sätze von Formeln unterschieden werden, die keine Sätze sind. So ist

$$\exists x (\text{Doktor}(x) \wedge \text{Klug}(x))$$

ein Satz, in

$$\exists x \text{Doktor}(x) \wedge \text{Klug}(x)$$

ist hingegen das zweite Vorkommen der Variable  $x$  frei. (Im Rahmen der ersten Formel wurde der Quantor auf die Formel  $(\text{Doktor}(x) \wedge \text{Klug}(x))$  angewandt, im Falle der zweiten Formel nur auf  $\text{Doktor}(x)$ .)

19

## DIE SEMANTIK DER QUANTOREN

- Wie in der Umgangssprache setzen auch quantifizierte Sätze unserer PL1-Sprache einen zuvor festgelegten *Gegenstands-* bzw. *Quantifikationsbereich* voraus.
- Dabei handelt es sich um eine nicht-leere Menge von Objekten wie etwa Zahlen oder Klötzchen.

20

- Um die Wahrheitsbedingungen eines quantifizierten Satzes anzugeben, muss zunächst der Begriff der *Erfüllung* geklärt werden.
- Es genügt vorerst, den Begriff anhand von Beispielen zu veranschaulichen. So erfüllt ein Objekt etwa die Formel  $\text{Cube}(x)$  genau dann, wenn es ein Würfel ist. Ein Objekt erfüllt die Formel  $\text{Cube}(x) \wedge \text{Small}(x)$  dann und nur dann, wenn es ein Würfel und klein ist. Und ein Objekt erfüllt die Formel  $\text{Cube}(x) \vee \neg \text{Large}(x)$  genau dann, wenn es ein Würfel oder nicht groß ist.

21

- Ein Objekt namens  $a$  erfüllt eine Formel  $S(x)$  genau dann, wenn der Satz  $S(a)$  wahr ist. Um zu prüfen, ob ein Objekt die Formel  $S(x)$  erfüllt, setzt man also den Namen des Objekts für  $x$  ein (falls es einen Namen besitzt— andernfalls muss ihm zunächst ein Name zugewiesen werden) und prüft dann, ob der resultierende Satz wahr ist.

22

- Ein Satz der Form  $\exists x S(x)$  ist nun wahr, wenn es mindestens ein Objekt im Gegenstandsbereich gibt, das die Teilformel  $S(x)$  erfüllt.
- Entsprechend ist  $\forall x S(x)$  wahr, wenn alle Objekte im Gegenstandsbereich die Teilformel  $S(x)$  erfüllen.

23

- Setzen wir als Gegenstandsbereich beispielsweise die Menge der geraden Zahlen voraus, ist  $\forall x \text{Gerade}(x)$  wahr, wenn alle geraden Zahlen gerade sind (was klarerweise zutrifft).
- Setzte man als Gegenstandsbereich aber die Menge aller *ganzen* Zahlen voraus, wäre  $\forall x \text{Gerade}(x)$  wahr, wenn alle ganzen Zahlen gerade sind (was klarerweise *nicht* zutrifft).

24

- Im Übrigen werden wir Ausdrücke wie  $S(x)$  oder  $P(y)$  als Platzhalter für möglicherweise komplexe Formeln verwenden. So könnte  $S(x)$  die folgende Formel vertreten:

$$\text{Doktor}(x) \wedge \text{Klug}(x)$$

25

- Mit  $S(b)$  ist dann die Formel gemeint, die sich aus  $S(x)$  ergibt, wenn man alle freien Vorkommnisse der Variablen  $x$  durch  $b$  ersetzt. Im obigen Fall wäre  $S(b)$ :

$$\text{Doktor}(b) \wedge \text{Klug}(b)$$

- Handelte es sich hingegen bei  $S(x)$  um die Formel  $\exists x \text{Doktor}(x) \wedge \text{Klug}(x)$ , wäre  $S(b)$ :

$$\exists x \text{Doktor}(x) \wedge \text{Klug}(b)$$

26

### DIE VIER ARISTOTELISCHEN FORMEN

- Einige Schlüsse mit quantifizierten Sätzen waren bereits in der Antike bekannt. So untersuchte Aristoteles im Rahmen seiner *Syllogistik* Sätze mit den folgenden Formen:

*Alle Ps sind Qs*

*Manche Ps sind Qs*

*Kein P ist ein Q*

*Manche Ps sind keine Qs*

27

- Mit Hilfe der Quantoren können diese Sätze wie folgt wiedergegeben werden:

- $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$

- $\exists x (P(x) \wedge Q(x))$

- $\forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$  bzw.  $\neg \exists x (P(x) \wedge Q(x))$

- $\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$

28

### KOMPLEXE NOMINALPHRASEN ÜBERSETZEN

- Im Deutschen werden Quantifikationen und insbesondere Existenzbehauptungen nicht immer explizit formuliert (*Es gibt ...*), sondern oftmals im Rahmen komplexer Nominalphrasen implizit vorgenommen.

29

- Im Falle *existenzieller Nominalphrasen* wird dabei die Existenz von etwas zum Ausdruck gebracht; sie beginnen häufig mit *manche, einige, wenigstens ein, etwas, irgendwas* oder einem unbestimmten Artikel.

- So ist der Satz

*Ein kleiner, fröhlicher Hund ist zu Hause*

wie folgt zu übersetzen:

$$\exists x [(Klein(x) \wedge Fröhlich(x) \wedge \text{Hund}(x)) \wedge \text{Zuhause}(x)]$$

30

- *Universelle Nominalphrasen* beginnen dagegen häufig mit Ausdrücken wie *alle, jeder, sämtliche*.

- Der Satz

*Jeder kleine, fröhliche Hund ist zu Hause*

ist wie folgt zu übersetzen:

$$\forall x [(Klein(x) \wedge Fröhlich(x) \wedge Hund(x)) \rightarrow Zuhause(x)]$$

31

- Entsprechendes gilt für Nominalphrasen, die mitten im Satz auftreten. Somit weicht die grammatikalische Form eines deutschen Satzes oft deutlich von der Form seiner PL1-Übersetzung ab:

*Max besitzt einen kleinen, fröhlichen Hund*

$$\exists x [(Klein(x) \wedge Fröhlich(x) \wedge Hund(x)) \wedge Besitzt(max, x)]$$

32

### KONVERSATIONALE IMPLIKATUREN UND QUANTIFIKATION

- Sätze der Form  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$  sind auch dann wahr, wenn es im zugrunde gelegten Gegenstandsbereich keine Objekte gibt, die  $P(x)$  erfüllen (da es somit keine Gegenbeispiele gibt).
- Solche Sätze nennt man *leererweise wahre Generalisierungen*.

33

- Ebenso sind Sätze wie

$$\forall y (Tet(y) \rightarrow Cube(y))$$

wahr, wenn es im zugrunde gelegten Gegenstandsbereich keine Tetraeder gibt. Der Satz ist dabei sogar *nur* in solchen Welten wahr.

- Allaussagen, die nur dann wahr sind, wenn ihr Antezedens von keinem Objekt erfüllt wird, heißen *wesenhaft leere Generalisierungen*.

34

- Umgangssprachlich werden solche Sätze oft als irreführend empfunden, da Sätze wie *Jeder Student im ersten Semester, der den Kurs besuchte, bestand die Prüfung* die konversationale Implikatur mit sich bringen, dass es tatsächlich Erstsemester unter den Kursteilnehmern gab.

35

- Eine weitere wichtige Implikatur besteht darin, dass die Äußerung von

*Manche Ps sind Qs*

gelegentlich nahe legt, dass

*Alle Ps sind Qs*

*nicht* gilt. Auch hier handelt es sich aber nicht um eine logische Folgerung, sondern um eine konversationale Implikatur, die aufgehoben werden kann. So kann man etwa sagen:

*Manche Teilnehmer bekamen ein sehr gut; es bekamen sogar alle ein sehr gut.*

36

## QUANTOREN UND FUNKTIONSSYMBOLLE

- Zusammen mit Quantoren lassen sich mit Funktionssymbolen Sachverhalte z.T. leichter ausdrücken als mit entsprechenden Prädikaten. So kann der Satz, dass der Großvater jedes Menschen netter als sein Vater ist, wie folgt ausgedrückt werden:

$$\forall x \text{Netter}(\text{vater}(\text{vater}(x)), \text{vater}(x))$$

37

- Mit entsprechenden Prädikaten lautet der Satz:  $\forall x \forall y \forall z ((\text{VaterVon}(x, y) \wedge \text{VaterVon}(y, z)) \rightarrow \text{Netter}(x, y))$
- Auch in unsere Klötzchensprache könnten wir Funktionssymbole einführen:  $wv(x)$  (das Objekt, das in der Spalte von  $x$  am weitesten vorne ist),  $wh(x)$  (das Objekt, das in der Spalte von  $x$  am weitesten hinten ist),  $wl(x)$  (das Objekt, das in der Zeile von  $x$  am weitesten links ist) und  $wr(x)$  (das Objekt, das in der Zeile von  $x$  am weitesten rechts ist).

38

- $\exists x (wl(x) = x)$  besagte dann etwa soviel wie *Mindestens ein Objekt ist identisch mit dem am weitesten links befindlichen Objekt in seiner Zeile bzw.: Es gibt mindestens ein Objekt, neben dem sich links nichts befindet.*
- Bei Ausdrücken wie  $wv(wl(a))$  ist das *innere* Funktionszeichen zuerst zu lesen: Ist  $b$  das am weitesten links stehende Objekt in der Zeile von  $a$ , bezeichnet  $wv(wl(a))$  das Objekt, das am weitesten vor  $b$  steht.

39

## SCHWERPUNKTE DER ABSCHLUSSKLAUSUR

- *Übersetzen* umgangssprachlicher Sätze in die Sprache der Aussagenlogik und umgekehrt. Beispielaufgaben: 3.21, 3.23–3.24, 7.11, 7.12, 7.15, 7.19, 7.20.
- *Übersetzen* umgangssprachlicher Sätze in die Sprache der Prädikatenlogik und umgekehrt. Beispielaufgaben: 11.17, 11.21, 11.22, 11.27, 11.28.

40

- Überprüfung auf *tautologische Wahrheit, Folgerung* und *Äquivalenz* mit Hilfe von *Wahrheitstabellen* und *Beweisen* sowie evtl. Konstruktion von Gegenbeispielen. Beispielaufgaben: 2.17–2.20, 4.2, 4.4–4.7, 4.12–4.18, 4.20–4.22, 6.3–6.6, 6.9–6.14, 6.18–6.20, 7.1–7.8, 8.26–8.30, 8.44–8.53.
- Überprüfung auf *PL1-Wahrheit, PL1-Folgerung* und *PL1-Äquivalenz* mit Hilfe von *Beweisen* sowie evtl. Konstruktion von Gegenbeispielen. Beispielaufgaben: 13.2–13.9, 13.11–13.16, 13.23–13.27, 13.40–13.50.

41

## ÜBUNGEN

- Bitte bis zur nächsten Vorlesung vorbereiten: **Kapitel 10** (*Die Logik der Quantifikation*)!
- Bis zum Tutorium bitte folgende Aufgaben auf Papier lösen und beim Tutor abgeben: 9.1, 9.6, 9.11, 9.13, 9.14, 9.16, 9.17, 9.19, 9.20 (die Welten bzw. Dateien zu 9.1, 9.6, 9.11 und 9.14 finden Sie unter „Aufgaben 7“ im Netz!)
- Falls Sie über die Software verfügen, sollten Sie (optional!) auch die „Sie sind dran“-Abschnitte bearbeiten!

42



**VORLESUNG 9**

- Die Logik der Quantoren 3
- Prädikatenlogische Gültigkeit & Folgerung 14
- PL1-Äquivalenzen 25
- Die axiomatische Methode 35
- Übungen 39

**DIE LOGIK DER QUANTOREN**

- Inwiefern sind die im Rahmen der Aussagenlogik eingeführten Begriffe wie der Begriff der *Tautologie* oder der *tautologischen Folgerung* noch im Rahmen der Prädikatenlogik anwendbar?
- Sätze wie  $\exists x \text{Cube}(x) \vee \neg \exists x \text{Cube}(x)$  sind nach wie vor Tautologien, d.h. wahr bereits aufgrund ihrer Junktoren. Bei diesem Satz handelt es sich um eine Instanz des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten:  $P \vee \neg P$ .

- *Keine* Tautologie ist hingegen der ähnlich aussehende Satz  $\exists x \text{Cube}(x) \vee \exists x \neg \text{Cube}(x)$ . Der Satz ist nicht nur aufgrund der Junktoren logisch wahr. Sonst wäre die Bedeutung von  $\exists$  unerheblich, was sie aber nicht ist:
 
$$\forall x \text{Cube}(x) \vee \forall x \neg \text{Cube}(x)$$
 ist in vielen Klötzchenwelten falsch.
- $\forall x \text{Cube}(x) \vee \neg \forall x \text{Cube}(x)$  ist aber wiederum eine Instanz des Prinzips vom ausgeschlossenen Dritten und somit tautologisch wahr.

- Im Allgemeinen ist jeder Satz, den man aus einer Tautologie erhält, indem man die atomaren Sätze durch beliebige komplexe Sätze ersetzt, wiederum eine Tautologie.
- Wir wissen etwa, dass  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  eine Tautologie ist. Ersetzen wir A durch  $\exists y (P(y) \vee R(y))$  und B durch den Satz  $\forall x (P(x) \wedge Q(x))$ , ergibt sich wiederum eine Tautologie:
 
$$(\exists y (P(y) \vee R(y)) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\neg \forall x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow \neg \exists y (P(y) \vee R(y)))$$

- Entsprechende Bemerkungen gelten für den Begriff der *tautologischen Folgerung*. Beim folgenden Schluss handelt es sich etwa um eine Instanz der  $\wedge$ -Einführung:
 

1. $\forall x \text{Cube}(x)$	3. $\forall x \text{Cube}(x) \wedge \forall x \text{Small}(x)$
2. $\forall x \text{Small}(x)$	
3. $\forall x \text{Cube}(x) \wedge \forall x \text{Small}(x)$	



- Beim folgenden Schluss handelt es sich aber *nicht* um eine Instanz der  $\wedge$ -Einführung. Der folgende Schluss ist zwar logisch gültig, aber aufgrund der Bedeutung von  $\forall$ :

- $\left| \begin{array}{l} 1. \forall x \text{ Cube}(x) \\ 2. \forall x \text{ Small}(x) \\ \hline 3. \forall x (\text{Cube}(x) \wedge \text{Small}(x)) \end{array} \right.$

7

- Dass der letzte Schluss logisch gültig aufgrund der Bedeutung von  $\forall$  ist, wird auch dadurch verdeutlicht, dass der folgende Schluss *nicht* gültig ist:

- $\left| \begin{array}{l} 1. \exists x \text{ Cube}(x) \\ 2. \exists x \text{ Small}(x) \\ \hline 3. \exists x (\text{Cube}(x) \wedge \text{Small}(x)) \end{array} \right.$

8

- Mit Hilfe von Tarski's World kann leicht überprüft werden, ob es sich bei einem quantifizierten Satz um eine Tautologie oder eine tautologische Folgerung aus bestimmten Prämissen handelt.
- Im Allgemeinen ist es nicht unbedingt einfach, einem prädikatenlogischen Satz anzusehen, ob er eine Tautologie ist.
- Will man dies in einem gegebenen Fall herausfinden, hilft der sog. *Algorithmus für die wahrheitsfunktionale Form*.

9

- Mit diesem Verfahren läßt sich die sog. *wahrheitsfunktionale Form* eines Satzes ermitteln, d.h. die Art und Weise, wie dieser mit Hilfe wahrheitsfunktionaler Junktoren aus atomaren und quantifizierten Sätzen aufgebaut ist.
- Der *Algorithmus für die wahrheitsfunktionale Form* verfährt folgendermaßen:
- 1. Quantifizierte oder atomare Satzbestandteile werden unterstrichen.

10

- 2. Am Ende der Unterstreichung wird dem Satzbestandteil ein Satzbuchstabe zugewiesen: Falls der Bestandteil schon auftauchte, verwenden wir den bereits verwendeten Buchstaben, sonst einen neuen.
- 3. In einem letzten Schritt ersetzen wir die unterstrichenen Satzbestandteile durch die ihnen zugeordneten Satzbuchstaben. Wir erhalten die *wahrheitsfunktionale Form* des Satzes.

11

- Ein quantifizierter Satz ist genau dann tautologisch, wenn seine wahrheitsfunktionale Form es ist.
- Ein PL1-Satz  $S$  folgt genau dann tautologisch aus PL1-Prämissen, wenn die wahrheitsfunktionale Form von  $S$  tautologisch aus den wahrheitsfunktionalen Formen der Prämissen folgt.

12

*Beispiel:*

- $\neg(\text{Tet}(d) \wedge \forall x \text{Small}(x)) \rightarrow (\neg\text{Tet}(d) \vee \neg\forall y \text{Small}(y))$
- $\neg(\underline{\text{Tet}(d)}_A \wedge \forall x \text{Small}(x)) \rightarrow (\neg\text{Tet}(d) \vee \neg\forall y \text{Small}(y))$
- $\neg(\text{Tet}(d)_A \wedge \forall x \text{Small}(x)_B) \rightarrow (\neg\text{Tet}(d) \vee \neg\forall y \text{Small}(y))$
- $\neg(\underline{\text{Tet}(d)}_A \wedge \forall x \text{Small}(x)_B) \rightarrow (\neg\underline{\text{Tet}(d)}_A \vee \neg\forall y \text{Small}(y))$
- $\neg(\text{Tet}(d)_A \wedge \forall x \text{Small}(x)_B) \rightarrow (\neg\underline{\text{Tet}(d)}_A \vee \neg\underline{\forall y \text{Small}(y)}_C)$
- $\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

13

### PRÄDIKATENLOGISCHE GÜLTIGKEIT UND FOLGERUNG

- Wie wir bereits sahen, gibt es viele logische Wahrheiten und Folgerungen, die keine *tautologischen* Wahrheiten bzw. Folgerungen sind.

14

- Um auch solche Folgerungen erfassen zu können, nähern wir uns den Begriffen der logischen Wahrheit bzw. Folgerung weiter mit Hilfe der Begriffe der PL1-Wahrheit bzw. PL1-Folgerung.
- Jede tautologische Wahrheit bzw. Folgerung ist auch eine PL1-Wahrheit bzw. Folgerung— aber nicht umgekehrt!

15

- Ein Satz ist PL1-wahr, wenn seine Wahrheit bereits feststeht aufgrund der Bedeutung der Junktoren, der Quantoren und =.
- Entsprechend ist ein Satz S eine PL1-Folgerung aus Prämissen, wenn es bereits aufgrund der Bedeutung der Junktoren, Quantoren und = nicht sein kann, dass die Prämissen wahr sind, während S falsch ist.

16

- PL1-Wahrheit oder PL1-Folgerung kann man somit feststellen, ohne die Bedeutungen der Namen und Prädikate (außer dem der Identität) zu kennen, die in den fraglichen Sätzen vorkommen.
- Bei analytischen Wahrheiten und analytischen Folgerungen kommt es dagegen auch auf die Bedeutung der Namen und Prädikate außer = an.

17

- Beispiele:

- $\forall x \text{SameSize}(x, x)$
- $\forall x \text{Cube}(x) \rightarrow \text{Cube}(b)$
- $(\text{Cube}(b) \wedge b = c) \rightarrow \text{Cube}(c)$
- $(\text{Small}(b) \wedge \text{SameSize}(b, c)) \rightarrow \text{Small}(c)$
- $\forall x \text{Schortelt}(x, x)$
- $\forall x \text{Tove}(x) \rightarrow \text{Tove}(b)$
- $(\text{Tove}(b) \wedge b = c) \rightarrow \text{Tove}(c)$
- $(\text{Mümsig}(b) \wedge \text{Schortelt}(b, c)) \rightarrow \text{Mümsig}(c)$

18

- 1.  $\forall x (\text{Tet}(x) \rightarrow \text{Large}(x))$
- 2.  $\neg \text{Large}(b)$
- 3.  $\neg \text{Tet}(b)$

- 1.  $\forall x (\text{Burggove}(x) \rightarrow \text{Mohm}(x))$
- 2.  $\neg \text{Mohm}(b)$
- 3.  $\neg \text{Burggove}(b)$

19

- *Ersetzungs-Methode:*
- 1. Um auf PL1-Wahrheit oder PL1-Folgerung zu testen, ersetzt man jedes Prädikat (außer  $\Rightarrow$ ) durch ein bedeutungsloses Prädikat (dabei wird jedes Vorkommen eines Prädikats durch dasselbe bedeutungslose Prädikat ersetzt).

20

- 2. Um zu prüfen, ob S eine PL1-Wahrheit ist, versucht man Namen, Prädikate und ggf. Funktionssymbole zu interpretieren und eine Situation zu beschreiben, in der der interpretierte Satz falsch ist. Gibt es keine solche Situation (ein sog. *PL1-Gegenbeispiel*), handelt es sich bei S um eine PL1-Wahrheit.

21

- 3. Um zu prüfen, ob S eine PL1-Folgerung aus bestimmten Prämissen ist, versucht man Namen, Prädikate und ggf. Funktionssymbole zu interpretieren und eine Situation zu beschreiben, in der die Prämissen wahr sind, S aber falsch ist. Gibt es kein PL1-Gegenbeispiel, handelt es sich um eine PL1-Folgerung.

22

- **Argument und PL1-Gegenbeispiel:**
- 1.  $\neg \exists x \text{Larger}(x, a)$
- 2.  $\neg \exists x \text{Larger}(b, x)$
- 3.  $\text{Larger}(c, d)$
- 4.  $\text{Larger}(a, b)$

- 1.  $\neg \exists x R(x, a)$
- 2.  $\neg \exists x R(b, x)$
- 3.  $R(c, d)$
- 4.  $R(a, b)$

23

- Eine Interpretation, welche die Prämissen wahr macht, die Konklusion aber falsch, könnte wie folgt aussehen: R bedeute soviel wie *mag*, c referiere auf Romeo, d auf Julia (die sich gegenseitig mögen), a sei Moriarty, b sei Scrooge (die niemanden mögen und von niemanden gemocht werden):

24

**PL1-ÄQUIVALENZEN**

- Zwei Wffs P und Q mit freien Variablen heißen *logisch äquivalent* (wir schreiben auch hier  $P \Leftrightarrow Q$ ), wenn beide Wffs in allen möglichen Situationen von denselben Dingen erfüllt werden.
- *Beispiel:*  $P(x) \rightarrow Q(x) \Leftrightarrow \neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)$

25

- In diesem Falle gilt auch, dass die Sätze  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$  und  $\forall x (\neg Q(x) \rightarrow \neg P(x))$  logisch äquivalent sind.
- Dies ergibt sich *nicht* aus den obigen Überlegungen zur wahrheitsfunktionalen Form, die etwa zeigen, dass

$$\neg(\exists x P(x) \wedge \forall y Q(y))$$

und

$$\neg\exists x P(x) \vee \neg\forall y Q(y)$$

äquivalent sind.

26

- Im Allgemeinen gilt das *Prinzip der Substitution äquivalenter Ausdrücke*: P und Q seien Wffs, möglicherweise mit freien Variablen. S(P) sei ein Satz mit P als Bestandteil.
- Wenn nun  $P \Leftrightarrow Q$ , dann gilt auch  $S(P) \Leftrightarrow S(Q)$ . So gilt etwa:
- $\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \text{Small}(x)) \Leftrightarrow$
- $\forall x (\neg\text{Cube}(x) \vee \text{Small}(x)) \Leftrightarrow$
- $\forall x (\neg\text{Cube}(x) \vee \neg\neg\text{Small}(x)) \Leftrightarrow$
- $\forall x \neg(\text{Cube}(x) \wedge \neg\text{Small}(x))$

27

- Des weiteren gelten auch für Quantoren die Morgansche Gesetze. Dies ergibt sich aus der Verwandtschaft von  $\forall$  mit  $\wedge$  sowie der Verwandtschaft von  $\exists$  mit  $\vee$ : In einer Welt, in der es nur drei Klötzchen mit den Namen a, b und c gibt, besagt  $\forall x P(x)$  soviel wie

$$P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$$

und  $\exists x P(x)$  soviel wie

$$P(a) \vee P(b) \vee P(c).$$

28

- Dies legt nahe, dass sich die Quantoren unter Negation ähnlich verhalten wie  $\wedge$  und  $\vee$ . Im oben beschriebenen Falle gilt so etwa:

$$\neg\forall x P(x)$$

ist wahr genau dann, wenn Folgendes gilt:

$$\neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c))$$

Letzters wiederum ist äquivalent zu:

$$\neg P(a) \vee \neg P(b) \vee \neg P(c)$$

und das ist wahr gdw. Folgendes gilt:

$$\exists x \neg P(x)$$

29

Im Allgemeinen gilt:

- $\neg\forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x \neg P(x)$
- $\neg\exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x \neg P(x)$

Zusammen mit den obigen Überlegungen ergibt sich:

- $\neg\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$
- $\neg\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$

30

- Die erste Äquivalenz lässt sich etwa mit der folgenden Äquivalenzkette nachweisen:
 
$$\neg \forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow$$

$$\neg \forall x (\neg P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow$$

$$\exists x \neg(\neg P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow$$

$$\exists x (\neg\neg P(x) \wedge \neg Q(x)) \Leftrightarrow$$

$$\exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$$

31

Einige wichtige Äquivalenzen zum Verhältnis der Quantoren zu Konjunktion und Disjunktion:

- $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
- $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\Leftrightarrow \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$
- $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
- $\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \not\Leftrightarrow \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

32

- Unter einer *leeren Quantifikation* versteht man das Voranstellen eines Quantors mit einer Variablen vor eine Formel, welche die besagte Variable gar nicht frei enthält; z.B.:
 
$$\forall x \text{Cube}(b) \text{ oder } \forall y \exists y \text{Small}(y)$$

In solchen Fällen (in denen die Variable  $x$  nicht frei in der Wff  $P$  vorkommt) gilt:

  - $\forall x P \Leftrightarrow P$
  - $\exists x P \Leftrightarrow P$
  - $\forall x (P \vee Q(x)) \Leftrightarrow P \vee \forall x Q(x)$
  - $\exists x (P \wedge Q(x)) \Leftrightarrow P \wedge \exists x Q(x)$

33

- Schließlich gelten noch die folgenden Äquivalenzen, falls  $P$  eine Wff und  $y$  eine Variable ist, die in  $P(x)$  nicht frei vorkommt:
  - $\forall x P(x) \Leftrightarrow \forall y P(y)$
  - $\exists x P(x) \Leftrightarrow \exists y P(y)$

34

### DIE AXIOMATISCHE METHODE

- Wie erwähnt gibt es viele gültige Schlüsse, die keine PL1-Folgerungen sind, z. B.:
  - $\forall x (\text{Cube}(x) \leftrightarrow \text{SameShape}(x, c))$
  - $\text{Cube}(c)$

Der Satz in Zeile 2. ist keine PL1-Folgerung aus Satz 1, folgt aber aus diesem *analytisch*, aufgrund der Bedeutung der Prädikate *Cube* und *SameShape*.

35

- Die Bedeutungen bestimmter Prädikate gibt man im Rahmen von formalen Theorien oft durch sog. *Axiome* an. Nimmt man oben etwa das Axiom  $\forall x \text{SameShape}(x, x)$  als Prämisse hinzu, ergibt sich eine PL1-Folgerung.
- Mit solchen Axiomen (oder auch *Bedeutungs-postulaten*) lässt sich oft eine analytische Folgerungsbeziehung auf eine PL1-Folgerung reduzieren.

36

- Grundlegende Axiome für die Prädikate bzgl. der Form unserer Klötzchen im Rahmen unserer Klötzchenwelt wären etwa:
  1.  $\neg \exists x (Cube(x) \wedge Tet(x))$
  2.  $\neg \exists x (Tet(x) \wedge Dodec(x))$
  3.  $\neg \exists x (Dodec(x) \wedge Cube(x))$
  4.  $\forall x (Tet(x) \vee Dodec(x) \vee Cube(x))$
- Das vierte Axiom ergibt sich dabei nicht aus der Bedeutung der Prädikate, sondern aus dem ins Auge gefassten Anwendungsbereich (Tarski's World).

37

- Eines der bekanntesten Beispiele einer axiomatischen Theorie ist die Euklidische Geometrie. Hier wird versucht, die Gesamtheit des geometrischen Wissens so zu systematisieren, dass alle wahren Behauptungen über die Geometrie als sog. *Theoreme* aus möglichst wenigen *Axiomen* hergeleitet werden können.

38

## ÜBUNGEN

---

- Bitte bis zur nächsten Vorlesung vorbereiten: **Kapitel 11** (*Mehrfache Quantifikationen*)!
- Bis zum Tutorium bitte folgende Aufgaben auf Papier lösen und beim Tutor abgeben: 10.1, 10.3, 10.9, 10.10, 10.13, 10.15, 10.20, 10.27 (die Welten bzw. Dateien zu 10.9 finden Sie unter „Aufgaben 8“ im Netz!)
- Falls Sie über die Software verfügen, sollten Sie (optional!) auch die „Sie sind dran“-Abschnitte bearbeiten!

39



## VORLESUNG 10

- Mehrfache Quantifikationen 3
- Gemischte Quantoren 10
- Übersetzen mit der Schritt-für-Schritt-Methode 17
- Deutsche Sätze paraphrasieren 20
- Mehrdeutigkeit und Kontextabhängigkeit 24
- Übersetzungen mit Funktionssymbolen 27
- Pränexe Form 31
- Übungen 36

2

## MEHRFACHE QUANTIFIKATIONEN

- Um deutsche Sätze mit mehreren quantifizierten Nominalphrasen in PL1 adäquat ausdrücken zu können, müssen wir mehrere Quantoren in einem Satz verwenden.
- Beispielsweise könnte der Satz *Jeder Würfel befindet sich links von allen Tetraedern* wie folgt ausgedrückt werden:

$$\forall x [\text{Cube}(x) \rightarrow \forall y (\text{Tet}(y) \rightarrow \text{LeftOf}(x, y))]$$

3

- Auch Sätze mit mehreren quantifizierten Nominalphrasen können somit im Sinne einer Aristotelischen Struktur wiedergegeben werden: Beim obigen Satz handelt es sich um eine Allaussage von der Form  $\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$ ; von allen Objekten, die  $A(x)$  erfüllen (im obigen Fall  $\text{Cube}(x)$ ) wird behauptet, dass sie auch die Eigenschaft  $B(x)$  besitzen (im obigen Fall  $\forall y (\text{Tet}(y) \rightarrow \text{LeftOf}(x, y))$ ).

4

- Entsprechendes gilt auch für Sätze mit existenziell quantifizierten Nominalphrasen wie *Einige Würfel befinden sich links von einigen Tetraedern*. Dieser Satz kann übersetzt werden als:

$$\exists x [\text{Cube}(x) \wedge \exists y (\text{Tet}(y) \wedge \text{LeftOf}(x, y))]$$

5

- Beim Umgang mit mehrfachen Quantifikationen ist zu beachten, dass die Verschiedenheit von Variablen *nicht* impliziert, dass sie verschiedene Gegenstände repräsentieren.
- So folgt aus dem Satz  $\forall x \forall y R(x, y)$  auch, dass  $\forall x R(x, x)$  gilt; entsprechend folgt aus  $\exists x R(x, x)$  auch, dass  $\exists x \exists y R(x, y)$  gilt.

6

- Daher kann der Satz *Für je zwei Würfel x und y gilt, dass sich x links oder rechts von y befindet* nicht durch den folgenden PL1-Satz wiedergegeben werden:

$$\forall x \forall y [(Cube(x) \wedge Cube(y)) \rightarrow (LeftOf(x, y) \vee RightOf(x, y))]$$

- Aus dem Satz

$$\forall x \forall y [(Cube(x) \wedge Cube(y)) \rightarrow (LeftOf(x, y) \vee RightOf(x, y))]$$

folgt nämlich auch, dass sich jeder Würfel links oder rechts *von sich selbst* befindet.

7

- Um die gewünschte Behauptung auszudrücken, dass *Für je zwei (verschiedene) Würfel x und y gilt, dass sich x links oder rechts von y befindet* muss auf den folgenden Satz zurückgegriffen werden:

$$\forall x \forall y [(Cube(x) \wedge Cube(y) \wedge x \neq y) \rightarrow (LeftOf(x, y) \vee RightOf(x, y))]$$

8

- Um im Allgemeinen auszudrücken, dass eine Relation zwischen zwei (verschiedenen) Objekten besteht, benötigen wir also einen Satz der Form  $\forall x \forall y (x \neq y \rightarrow \dots)$ .
- $\exists x \exists y (x \neq y \wedge \dots)$  drückt entsprechend aus, dass es mindestens *zwei* Objekte mit bestimmten Eigenschaften gibt.

9

## GEMISCHTE QUANTOREN

- Um die Behauptung *Jeder Würfel befindet sich links von einem Tetraeder* auszudrücken, benötigt man sowohl den All- wie auch den Existenzquantor:

$$\forall x [Cube(x) \rightarrow \exists y (Tet(y) \wedge LeftOf(x, y))]$$

10

- Wiederum handelt es sich um einen Satz mit Aristotelischer Struktur: Es handelt sich wiederum um eine Allaussage von der Form  $\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$ ; von allen Objekten, die A(x) erfüllen (im obigen Fall Cube(x)) wird behauptet, dass sie auch die Eigenschaft B(x) besitzen (im obigen Fall

$$\exists y (Tet(y) \wedge LeftOf(x, y))).$$

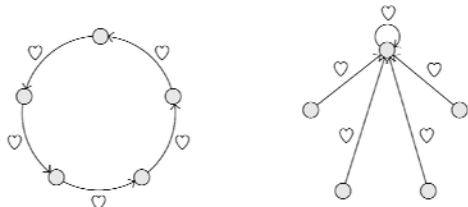
11

- Im Falle von Sätzen mit nur einer Art von Quantor ist deren Reihenfolge unerheblich. So sagt  $\forall x \forall y Mag(x, y)$  dasselbe wie  $\forall y \forall x Mag(x, y)$ . Und entsprechend sind die Sätze  $\exists x \exists y Mag(x, y)$  und  $\exists y \exists x Mag(x, y)$  äquivalent.
- Im Gegensatz dazu kommt es bei gemischten Quantifikationen sehr wohl auf die Reihenfolge der Quantoren an.  $\forall x \exists y Mag(x, y)$  besagt, dass jeder jemanden mag. Demgegenüber besagt  $\exists y \forall x Mag(x, y)$ , dass es (mindestens) einen Glückspilz gibt, den jeder mag.

12



- Die Aussage  $\exists y \forall x \text{Mag}(x, y)$  impliziert  $\forall x \exists y \text{Mag}(x, y)$ , aber nicht umgekehrt; der (schwächere) Satz  $\forall x \exists y \text{Mag}(x, y)$  ist so in jedem der beiden folgenden Szenarien wahr, die (stärkere) Behauptung  $\exists y \forall x \text{Mag}(x, y)$  trifft dagegen nur im rechten Fall zu:



13

- Etwas ganz anderes bewirkt das Vertauschen der Variablen im Inneren eines Satzes. So besagt  $\forall x \exists y \text{Mag}(y, x)$ , dass jeder von jemandem gemocht wird —  $\exists y \forall x \text{Mag}(y, x)$  besagt hingegen, dass jemand jeden mag.
- Wir hatten bereits gesehen, wie man mit Hilfe von Quantoren und = Behauptungen ausdrücken kann, denen zufolge es *mindestens* zwei (bzw. drei, vier usw.) Objekte mit einer bestimmten Eigenschaft gibt:

$$\exists x \exists y (x \neq y \wedge \dots)$$

14

- Mit Hilfe von Quantoren und = können wir nun auch ausdrücken, dass es *höchstens* zwei (bzw. drei, vier usw.) Objekte mit einer bestimmten Eigenschaft gibt, z.B. *Es gibt höchstens einen Würfel*:

$$\forall x \forall y ((\text{Cube}(x) \wedge \text{Cube}(y)) \rightarrow x = y)$$

15

- Ebenfalls können wir ausdrücken, dass es *genau* zwei (bzw. drei, vier usw.) Objekte mit einer bestimmten Eigenschaft gibt (also mindestens eins und auch höchstens eins), z.B. *Es gibt genau einen Würfel*:

$$\exists x (\text{Cube}(x) \wedge \forall y (\text{Cube}(y) \rightarrow y = x))$$

16

### ÜBERSETZEN MIT DER SCHRITT-FÜR-SCHRITT-METHODE

- Um Sätze in die PL1-Sprache zu übersetzen, in denen mehrere quantifizierte Nominalphrasen vorkommen, ist es sinnvoll, schrittweise vorzugehen.

17

- Um etwa den Satz *Jeder Würfel befindet sich links von einem Tetraeder* zu übersetzen, beginnt man mit der ersten quantifizierten Nominalphrase *jeder Würfel* und behandelt den komplexen Ausdruck *befindet-sich-links-von-einem-Tetraeder* als eine Einheit:

$$\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow x \text{ befindet-sich-links-von-einem-Tetraeder})$$

18

- Im nächsten Schritt müssen wir den Ausdruck  $x$  *befindet-sich-links-von-einem-Tetraeder* in unsere PL1-Sprache übertragen, wobei wir die Variable  $x$  als Namen behandeln. Dann können wir den Ausdruck als einen einfachen Satz verstehen:

$$\exists y (\text{Tet}(y) \wedge \text{LeftOf}(x, y))$$

- Setzt man diesen Ausdruck oben ein, ergibt sich der gesuchte Satz:

$$\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \exists y (\text{Tet}(y) \wedge \text{LeftOf}(x, y)))$$

19

## DEUTSCHE SÄTZE PARAPHRASIEREN

- Einige Sätze des Deutschen eignen sich nicht besonders zur Anwendung der Schritt-für-Schritt-Methode, z.B.: *Wenn eine Studienanfängerin einen Logik-Kurs belegt, muss sie intelligent sein.* Die Anwendung der Schritt-für-Schritt-Methode ergäbe etwa Folgendes:

$$\exists x (\text{Stud.}(x) \wedge \exists y (\text{Logikk.}(y) \wedge \text{Belegt}(x, y))) \rightarrow \text{Intelligent}(x)$$

20

- In solchen Fällen ist es meist hilfreich, zunächst eine geeignete Paraphrase des Satzes zu suchen und diese dann zu übersetzen. In diesem Fall wäre eine geeignete Paraphrase etwa:

*Jede Studienanfängerin, die einen Logik-Kurs belegt, muss intelligent sein bzw.:*

$$\forall x [(\text{Stud.}(x) \wedge \exists y (\text{Logikk.}(y) \wedge \text{Belegt}(x, y))) \rightarrow \text{Intelligent}(x)]$$

21

- Weitere Sätze, die vor der Anwendung der Schritt-für-Schritt-Methode einer Paraphrasierung bedürfen, sind die sog. *Eselssätze*:

*Jeder Bauer, der einen Esel besitzt, schlägt ihn*

- Ohne Paraphrasierung könnte man geneigt sein, den Satz wie folgt zu übersetzen:

$$\forall x [(\text{Bauer}(x) \wedge \exists y (\text{Esel}(y) \wedge \text{Besitzt}(x, y))) \rightarrow \text{Schlägt}(x, y)]$$

22

- Eine angemessene Übersetzung des Satzes erhält man, wenn man den Satz zunächst durch *Jeder Esel wird von jedem Bauern, der ihn besitzt, geschlagen* paraphrasiert:

$$\forall x [\text{Esel}(x) \rightarrow \forall y ((\text{Bauer}(y) \wedge \text{Besitzt}(y, x)) \rightarrow \text{Schlägt}(y, x))]$$

23

## MEHRDEUTIGKEIT UND KONTEXTABHÄNGIGKEIT

- Schwierigkeiten beim Übersetzen können sich auch durch Mehrdeutigkeiten ergeben. So ist etwa der Satz

*Jede Minute wird in New York ein Mann überfallen*

mehrdeutig und könnte sowohl im ersten als auch im zweiten folgenden Sinn übersetzt werden:

24

- $\exists y (\text{Mann}(y) \wedge \forall x (\text{Minute}(x) \rightarrow \text{ÜberfallenWährend}(y, x)))$
- $\forall x (\text{Minute}(x) \rightarrow \exists y (\text{Mann}(y) \wedge \text{ÜberfallenWährend}(y, x)))$
- Die erste Lesart wird dabei als *starke* Interpretation bezeichnet, die zweite als *schwache*. Die starke Lesart impliziert dabei die schwache aber nicht umgekehrt.

25

- Wird ein Satz geäußert, ist durch den Kontext meist klar, ob er im starken oder im schwachen Sinne zu verstehen ist. So wird der Satz *Jede Minute wird in New York ein Mann überfallen*

in der Regel im schwachen Sinne verstanden werden. Ein Kontext, der die starke Lesart suggeriert, ist der Folgende:

*Jede Minute wird in New York ein Mann überfallen. Wir werden ihn heute Abend interviewen.*

26

## ÜBERSETZUNGEN MIT FUNKTIONSSYMBOLEN

- Jede Funktion ist eine bestimmte Art von Relation—nämlich eine solche Relation R, so dass es für jedes a, das in der Relation R zu einem b steht, *genau ein* derartiges b gibt.

27

- Wie wir bereits gesehen haben, können wir mit Hilfe gemischter Quantoren ausdrücken, dass es genau ein Objekt einer bestimmten Art gibt. Daher kann nun auch gezeigt werden, dass alles, was im Rahmen von PL1 mit Funktionsausdrücken gesagt werden kann, auch mit Hilfe von Relationsausdrücken ausgedrückt werden kann (wenn auch auf Kosten der Komplexität der verwendeten Sätze).

28

- Der Satz  $\forall x \text{ÄlterAls}(\text{mutter}(x), x)$  besagt, dass die Mutter einer Person stets älter als die Person selbst ist.
- Aufgrund der Verwendung des einstelligen Funktionsausdruck mutter kann dem Satz aber auch noch entnommen werden, dass jede Person genau eine Mutter hat.

29

- Wollte man all dies im Rahmen eines Satzes mit dem zweistelligen Relationssymbol MutterVon wiedergeben, müsste man etwa auf den folgenden, recht komplizierten Ausdruck zurückgreifen:

$$\forall x \exists y [(\text{MutterVon}(y, x) \wedge \text{ÄlterAls}(y, x) \wedge \forall z (\text{MutterVon}(z, x) \rightarrow y = z))]$$

30

**PRÄNEXE FORM**

- Eine Wff befindet sich in *pränexer Normalform*, wenn sie entweder keine Quantoren enthält oder von der folgenden Form ist:

$$Q_1 v_1 Q_2 v_2 \dots Q_n v_n P$$

wobei jedes  $Q_i$  entweder  $\forall$  oder  $\exists$  ist, jedes  $v_i$  eine Variable ist und die Wff  $P$  quantorenfrei ist.

- Dabei gibt es zu jedem Satz einen äquivalenten Satz in pränexer Normalform.

31

- Die pränex Form ist unter anderem von Interesse, da sie deutlich macht, wie viele *Alternierungen* von Quantoren (die Anzahl der Wechsel von  $\forall$  auf  $\exists$  und anders herum) in einer Formel vorkommen.
- Dies wird als Maß der logischen Komplexität einer Formel erachtet.

32

- Die zur Umwandlung einer Formel in pränex Normalform benötigten Regeln haben wir bereits kennen gelernt. Neben den de Morganschen Regeln für Quantoren zählen dazu:

- $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$
- $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists x P \vee \exists x Q(x)$

33

*Leere Quantifikation*

- $\forall x P \Leftrightarrow P$
- $\exists x P \Leftrightarrow P$
- $\forall x (P \vee Q(x)) \Leftrightarrow P \vee \forall x Q(x)$
- $\exists x (P \wedge Q(x)) \Leftrightarrow P \wedge \exists x Q(x)$

*Falls  $y$  in  $P(x)$  nicht frei vorkommt:*

- $\forall x P(x) \Leftrightarrow \forall y P(y)$
- $\exists x P(x) \Leftrightarrow \exists y P(y)$

34

- Um Sätze in pränex Normalform umzuwandeln, geht man von innen nach außen vor:

- $(\exists x P(x) \vee R(b)) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge \forall x Q(x))$
- $\exists x (P(x) \vee R(b)) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge \forall x Q(x))$
- $\exists x (P(x) \vee R(b)) \rightarrow \forall x (P(x) \wedge Q(x))$
- $\neg \exists x (P(x) \vee R(b)) \vee \forall x (P(x) \wedge Q(x))$
- $\forall x \neg (P(x) \vee R(b)) \vee \forall x (P(x) \wedge Q(x))$
- $\forall x \neg (P(x) \vee R(b)) \vee \forall z (P(z) \wedge Q(z))$
- $\forall x [\neg (P(x) \vee R(b)) \vee \forall z (P(z) \wedge Q(z))]$
- $\forall x \forall z [\neg (P(x) \vee R(b)) \vee (P(z) \wedge Q(z))]$

35

**ÜBUNGEN**

- Bitte bis zur nächsten Vorlesung vorbereiten: **Kapitel 12** (*Beweismethoden für Quantoren*)!
- Bis zum Tutorium bitte folgende Aufgaben auf Papier lösen und beim Tutor abgeben: 11.4, 11.7, 11.17 (nur übersetzen), 11.22, 11.27, 11.28, 11.29, 11.38, 11.41 (siehe zu 11.4 und 11.7 „Aufgaben 9“ im Internet!)
- Falls Sie über die Software verfügen, sollten Sie (optional!) auch die „Sie sind dran“-Abschnitte bearbeiten!

36



## VORLESUNG II

- Beweismethoden für Quantoren 3
- Die Methode der existenziellen Instanziation 10
- Die Methode des allgemeinen konditionalen Beweises 16
- Beweise mit gemischten Quantoren 27
- Die Axiomatisierung der Form 32
- Übungen 44

2

## BEWEISMETHODEN FÜR QUANTOREN

- Wie im Falle der Aussagenlogik verfügt auch die Prädikatenlogik über einfache Ableitungsschritte und substanziellere Beweismethoden für den Umgang mit Quantoren.
- Zu den einfachen Ableitungsschritten zählen die *All(quantor)-Beseitigung* bzw. *universelle Instanziation* sowie die *Existenz(quantor)-Einführung* bzw. *existenzielle Generalisierung*.

3

- Die *All(quantor)-Beseitigung* bzw. *universelle Instanziation* erlaubt von  $\forall x S(x)$  auf  $S(c)$  zu schließen, wobei  $c$  ein beliebiger Name der verwendeten Sprache ist.
- Andererseits erlaubt es die *Existenz-(quantor)-Einführung* bzw. *existenzielle Generalisierung*, ausgehend von  $S(c)$  auf  $\exists x S(x)$  zu schließen.  $c$  ist dabei wiederum ein beliebiger Name der verwendeten Sprache.

4

- Im Falle der Existenz Einführung wird die Existenz eines Objektes mit einer bestimmten Eigenschaft also dadurch bewiesen, dass ein entsprechendes Beispiel vorgeführt wird.
- So kann man auf  $\exists x \exists y \exists z x^2 + y^2 = z^2$  schließen, wenn man gezeigt hat, dass  $3^2 + 4^2 = 5^2$  gilt.

5

- Existenzbeweise können aber auch ohne das Aufzeigen eines entsprechenden Beispiels geführt werden. Etwa könnte man im Rahmen eines indirekten Beweises ausgehend von der Annahme  $\neg \exists x S(x)$  einen Widerspruch herleiten und somit  $\exists x S(x)$  zeigen.

6

- Beispiel eines informellen Beweises:

$$\begin{array}{|l} \forall x [\text{Cube}(x) \rightarrow \text{Large}(x)] \\ \forall x [\text{Large}(x) \rightarrow \text{LeftOf}(x, b)] \\ \text{Cube}(d) \\ \hline \exists x [\text{Large}(x) \wedge \text{LeftOf}(x, b)] \end{array}$$

- Wendet man die Allbeseitigung auf die erste und die zweite Prämisse an, ergeben sich

$$\begin{array}{l} (1) \text{Cube}(d) \rightarrow \text{Large}(d) \\ (2) \text{Large}(d) \rightarrow \text{LeftOf}(d, b) \end{array}$$

7

- Aus der dritten Prämisse und (1) ergibt sich dann aufgrund von *Modus Ponens*:

$$(3) \text{Large}(d)$$

- Aus (3) und (2) ergibt sich dann wiederum aufgrund von *Modus Ponens*:

$$(4) \text{LeftOf}(d, b)$$

- Aufgrund von (3) und (4) gilt nun

$$(5) \text{Large}(d) \wedge \text{LeftOf}(d, b)$$

und somit aufgrund der Existenz Einführung:

$$\exists x [\text{Large}(x) \wedge \text{LeftOf}(x, b)]$$

8

- Die Gültigkeit der beiden besprochenen Ableitungsschritte beruht allerdings darauf, dass Namen in PL1-Sprachen stets ein Objekt bezeichnen.

- Im Falle umgangssprachlicher Namen ist dies nicht immer so. Daher ist der Schritt nicht in allen umgangssprachlichen Kontexten gültig. So kann man etwa nicht von

*Der Weihnachtsmann existiert nicht*

auf den folgenden Satz schließen:

*Es gibt etwas, das nicht existiert*

9

## DIE METHODE DER EXISTENZIELLEN INSTANZIATION

- Zu den komplexeren Beweismethoden mit Quantoren zählen die *existenzielle Instanziation* sowie die *universelle Generalisierung*.

10

- Ausgehend von einem Satz der Form  $\exists x S(x)$  darf natürlich nicht ohne Weiteres darauf geschlossen werden, dass für ein beliebiges Objekt  $c$   $S(c)$  gilt.
- Allerdings gibt es nach  $\exists x S(x)$  mindestens ein Objekt, das  $S(x)$  erfüllt, und dem kann vorübergehend ein Name zugewiesen werden.
- Dabei ist zu beachten, dass wir über dieses Objekt keine weiteren Informationen verfügen, weshalb der vorübergehende Name im Beweis nicht schon zuvor auftreten darf.

11

- Im Falle der *Existenz(quantor)-Beseitigung* bzw. *existenziellen Instanziation* dürfen wir also ausgehend von  $\exists x S(x)$  einem der Gegenstände, die  $S(x)$  erfüllen, einen Namen  $d$  geben, der (im Beweis) nicht schon zuvor verwendet wurde. Wir können dann  $S(d)$  annehmen und im Beweis verwenden.

12

- Ein umgangssprachliches Beispiel dieses Verfahrens ist etwa der Gebrauch von Namen wie *Jack the Ripper*. Solche Namen werden eingeführt, um Überlegungen über eine Person anzustellen, von der man zunächst nur weiß, dass sie existiert.

13

- Ein informeller Beweis als Beispiel:

$$\begin{array}{|l} \forall x [\text{Cube}(x) \rightarrow \text{Large}(x)] \\ \forall x [\text{Large}(x) \rightarrow \text{LeftOf}(x, b)] \\ \exists x \text{Cube}(x) \\ \hline \exists x [\text{Large}(x) \wedge \text{LeftOf}(x, b)] \end{array}$$

- Aufgrund der dritten Prämisse wissen wir, dass es ein Objekt gibt, das  $\text{Cube}(x)$  erfüllt. Diesem weisen wir den (neuen!) Namen  $c$  zu, weshalb wir von  $\text{Cube}(c)$  ausgehen können.

14

- Dann ergibt sich (wie oben) aber mit der ersten Prämisse  $\text{Large}(c)$  und somit aufgrund der zweiten Prämisse  $\text{LeftOf}(c, b)$ .
- Damit folgt  $\text{Large}(c) \wedge \text{LeftOf}(c, b)$  und mit der Existenz-Einführung ergibt sich die gewünschte Konklusion.

15

### **DIE METHODE DES ALLGEMEINEN KONDITIONALEN BEWEISES**

- Es gibt zwei Beweismethoden, mit denen ein Allquantor in einen Beweis eingeführt werden kann. Eine ist die Methode des *allgemeinen* konditionalen Beweises.

16

- Um zu beweisen, dass *alle* Objekte einer bestimmten Gruppe die durch  $S(x)$  ausgedrückte Eigenschaft erfüllen, wählt man einen (neuen!) Namen  $c$  für ein *beliebiges* Element der Gruppe. Kann man nun aufgrund von Eigenschaften, die *alle* zur Gruppe gehörigen Objekte besitzen, zeigen, dass  $S(c)$  gilt, darf man darauf schließen, dass alle Objekte der Gruppe  $S(x)$  erfüllen.

17

- Beispiel:

$$\begin{array}{|l} \text{Jeder, der einen fortgeschrittenen Logik-} \\ \text{Kurs mit der Note 1,0 besteht, ist klug.} \\ \text{Jeder Mathematikstudent bestand einen} \\ \text{fortgeschrittenen Logik-Kurs mit 1,0.} \\ \hline \text{Jeder Mathematikstudent ist klug.} \end{array}$$

18

- Es bezeichne  $c$  einen beliebigen Mathematikstudenten. Nach der zweiten Prämisse gilt für alle Mathematikstudenten und somit auch für  $c$ , dass sie einen fortgeschrittenen Logik-Kurs mit 1,0 bestanden haben.
- Dann ist  $c$  der ersten Prämisse zufolge aber auch klug.
- Da  $c$  unter den Mathematikstudenten aber völlig willkürlich ausgewählt war, gilt für alle Mathematikstudenten, dass sie klug sind.

19

- Um einen Satz der Form  $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$  zu beweisen, wählt man also einen (neuen!) Namen  $c$ , von dem man nur  $P(c)$  voraussetzt. Kann nun  $Q(c)$  gezeigt werden, darf auf  $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$  geschlossen werden.
- Dies bezeichnet man als *Methode des allgemeinen konditionalen Beweises*.

20

- Diese Methode kann als Kombination zweier Beweismethoden verstanden werden: dem konditionalen Beweis und der sog. *universellen Generalisierung* bzw. *All-(quantor)-Einführung*.
- Mit Letzterer werden Aussagen der Form  $\forall x S(x)$  bewiesen. Dazu wählt man einen neuen Namen, z.B.  $c$ , für ein *beliebiges* Element des Gegenstandsbereiches. Kann nun  $S(c)$  gezeigt werden, darf auf  $\forall x S(x)$  geschlossen werden.

21

- Ein informeller Beweis als Beispiel:
 

$\forall x [Cube(x) \rightarrow Small(x)]$
$\forall x Cube(x)$
$\forall x Small(x)$
- Zunächst wählen wir einen (neuen) Namen  $d$  für ein beliebiges Objekt des Gegenstandsbereiches. Aufgrund der beiden Prämissen muss für  $d$  gelten:
 

$Cube(d) \rightarrow Small(d)$   
 $Cube(d)$

22

- Daraus folgt aber aufgrund von *Modus Ponens*  $Small(d)$ . Da  $d$  jedes beliebige Objekt des Gegenstandsbereiches sein könnte, ergibt sich die gewünschte Konklusion  $\forall x Small(x)$ .

23

- Ein weiteres Beispiel:
 

$\forall x Cube(x)$
$\forall x Small(x)$
$\forall x [Cube(x) \wedge Small(x)]$
- Zunächst wählen wir einen (neuen) Namen  $d$  für ein beliebiges Objekt des Gegenstandsbereiches. Aufgrund der beiden Prämissen muss für  $d$  gelten:
 

$Cube(d)$   
 $Small(d)$

24



- Dann gilt aber auch  $\text{Cube}(d) \wedge \text{Small}(d)$ . Da  $d$  jedes beliebige Objekt des Gegenstandsbereiches sein könnte, ergibt sich aufgrund der universellen Generalisierung die Konklusion  $\forall x (\text{Cube}(x) \wedge \text{Small}(x))$ .
- Jeder Beweis, der mit der Methode des allgemeinen konditionalen Beweises geführt wurde, kann auch mittels universeller Generalisierung geführt werden und umgekehrt.

25

- Wurde etwa  $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$  mit der Methode des allgemeinen konditionalen Beweises gezeigt, kann man auch zunächst einen neuen Namen  $c$  einführen und dann einen einfachen konditionalen Beweis für  $P(c) \rightarrow Q(c)$  führen. Dann kann aufgrund der universellen Generalisierung auf  $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$  geschlossen werden.
- Andererseits kann man  $\forall x P(x)$  mit der Methode des allgemeinen konditionalen Beweises zeigen, indem man den äquivalenten Satz  $\forall x [x = x \rightarrow P(x)]$  nachweist.

26

### BEWEISE MIT GEMISCHTEN QUANTOREN

- Bei Beweisen mit gemischten Quantoren gibt es eine wichtige Einschränkung zu beachten.
- Wie wir gesehen hatten impliziert  $\exists y \forall x \text{Adjoins}(x, y)$  die Aussage  $\forall x \exists y \text{Adjoins}(x, y)$  aber nicht umgekehrt.

27

- Betrachten wir nun den folgenden (fehlerhaften!) ‚Beweis‘:

$$\begin{array}{|l} \forall x \exists y \text{Adjoins}(x, y) \\ \hline \exists y \forall x \text{Adjoins}(x, y) \end{array}$$

- Es sei  $c$  ein beliebiges Objekt des Gegenstandsbereiches. Dann gilt wegen der Prämisse:  $\exists y \text{Adjoins}(c, y)$ . Es sein nun  $d$  derart, dass  $\text{Adjoins}(c, d)$ . Da  $c$  beliebig gewählt war, dürfen wir auf  $\forall x \text{Adjoins}(x, d)$  schließen und wegen existenzieller Generalisierung auch auf  $\exists y \forall x \text{Adjoins}(x, y)$ .

28

- Das Problem an diesem Beweis ist, dass wir die universelle Generalisierung auf  $\text{Adjoins}(c, d)$  angewandt hatten. Zwar war  $c$  beliebig gewählt, aber  $d$  war hier mittels existenzieller Instanziation gewonnen worden aus  $\exists y \text{Adjoins}(c, y)$ . Damit hängt aber das gewählte  $d$  davon ab, welches spezifische Objekt  $c$  vertritt. Wenn wir zu  $\text{Adjoins}(c, d)$  also nur gelangen aufgrund der besonderen Eigenart von  $c$ , dürfen wir nicht verallgemeinern/die universelle Generalisierung anwenden, um auf  $\forall x \text{Adjoins}(x, d)$  zu schließen.

29

- Daher sind die folgenden Einschränkungen zu beachten:
- Soll mit einem allgemeinen konditionalen Beweis  $\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$  bewiesen werden, führt man einen neuen Namen  $c$  ein und nimmt  $P(c)$  an. Herzuleiten ist dann  $Q(c)$ .  $Q$  darf dabei aber keine Namen enthalten, die nach der Annahme von  $P(c)$  durch existenzielle Instanziation eingeführt wurden.

30

- Soll mit universeller Generalisierung  $\forall x S(x)$  bewiesen werden, führt man einen neuen Namen  $c$  ein und zeigt  $S(c)$ .  $S(c)$  darf dabei aber keine Namen enthalten, die nach der Einführung von  $c$  durch existenzielle Instanziation eingeführt wurden.

31

**DIE AXIOMATISIERUNG DER FORM**

- Bei der Axiomatisierung der Formeigenschaften der Klötzchen hatten wir bereits auf die folgenden Axiome zurückgegriffen:
  1.  $\neg \exists x (Cube(x) \wedge Tet(x))$
  2.  $\neg \exists x (Tet(x) \wedge Dodec(x))$
  3.  $\neg \exists x (Dodec(x) \wedge Cube(x))$
  4.  $\forall x (Tet(x) \vee Dodec(x) \vee Cube(x))$

32

- Mit Hilfe dieser Axiome können analytische Folgerungen auf PL1-Folgerungen ‚reduziert‘ werden: So ist  $\neg \exists x Cube(x)$  eine analytische, aber keine PL1-Folgerung aus:
  - (\*)  $\exists x \exists y (Tet(x) \wedge Dodec(y) \wedge \forall z (z = x \vee z = y))$
  - $\neg \exists x Cube(x)$  ist aber eine PL1-Folgerung aus (\*) und den Axiomen 1–4.

33

- Beweis:
 

$\exists x \exists y (Tet(x) \wedge Dodec(y) \wedge \forall z (z = x \vee z = y))$	$\forall z (z = x \vee z = y)$
Axiome 1–4	
$\neg \exists x Cube(x)$	
- Der ersten Prämisse zufolge gibt es ein Tetraeder  $e$  und ein Dodekaeder  $f$ , so dass jedes Objekt identisch mit  $e$  oder  $f$  ist.

34

- Zum Zwecke eines Beweises durch Widerspruch nehmen wir an, dass  $\exists x Cube(x)$  gilt, dass es also einen Würfel  $c$  gibt. Nach dem Obigen muß  $c = e$  oder  $c = f$  sein.
- Im ersten Fall wäre  $c$  aufgrund der Ununterscheidbarkeit von Identischem sowohl ein Würfel als auch ein Tetraeder, was Axiom 1 widerspricht. Im zweiten Fall wäre  $c$  sowohl ein Würfel als auch ein Dodekaeder, was Axiom 3 widerspricht.

35

- In jedem Falle ergibt sich also ein Widerspruch, was zeigt, dass die Annahme  $\exists x Cube(x)$  falsch ist.
- Bislang verfügen wir aber über keine Axiome, welche die Bedeutung von SameShape wiedergeben. Entsprechende Axiome können in der Form von Einführungs- und Beseitigungsregeln spezifiziert werden.

36

- SameShape **Einführungsaxiome:**
- 5.  $\forall x \forall y ((\text{Cube}(x) \wedge \text{Cube}(y)) \rightarrow \text{SameShape}(x, y))$
- 6.  $\forall x \forall y ((\text{Dodec}(x) \wedge \text{Dodec}(y)) \rightarrow \text{SameShape}(x, y))$
- 7.  $\forall x \forall y ((\text{Tet}(x) \wedge \text{Tet}(y)) \rightarrow \text{SameShape}(x, y))$

37

- SameShape **Beseitigungsaxiome:**
- 8.  $\forall x \forall y ((\text{Cube}(x) \wedge \text{SameShape}(x, y)) \rightarrow \text{Cube}(y))$
- 9.  $\forall x \forall y ((\text{Dodec}(x) \wedge \text{SameShape}(x, y)) \rightarrow \text{Dodec}(y))$
- 10.  $\forall x \forall y ((\text{Tet}(x) \wedge \text{SameShape}(x, y)) \rightarrow \text{Tet}(y))$

38

- Bei der Suche nach Axiomen ist es wichtig darauf zu achten, dass die Axiome *korrekt* sind, d.h.: Die Axiome müssen wahr sein gegeben die Bedeutung der behandelten Prädikate und dem ins Auge gefassten Anwendungsbereich.

39

- Wenn möglich sollten die Axiome zudem *vollständig* sein, d.h.: Ist ein Argument gültig aufgrund der Bedeutung der behandelten Prädikate und dem ins Auge gefassten Anwendungsbereich, so ist die Konklusion des Argumentes auch eine PL1-Folgerung aus den Prämissen des Argumentes und den fraglichen Axiomen.

40

- Die obigen zehn Axiome sind sowohl eine korrekte als auch eine vollständige Axiomatisierung der Formprädikate unserer Klötzchensprache.
- Beispielsweise folgt  $\forall x \text{SameShape}(x, x)$  aus den Axiomen: Es sei  $b$  ein beliebiges Klötzchen. Aufgrund von Axiom 4 ist jeder Gegenstand und somit auch  $b$  ein Tetraeder, ein Dodekaeder oder ein Würfel.

41

- Ist  $b$  ein Tetraeder, garantiert Axiom 7, dass  $b$  die gleiche Form wie  $b$  hat. Ist  $b$  ein Dodekaeder bzw. ein Würfel, folgt das gewünschte Resultat aus Axiom 6 bzw. 5.
- In jedem Fall ist  $b$  also von derselben Form wie  $b$  und da  $b$  beliebig gewählt war, gilt für jedes Klötzchen, dass es dieselbe Form hat wie es selbst.

42

- Ein berühmter Versuch, die Eigenschaften natürlicher Zahlen zu axiomatisieren, stellen die sog. *Peano-Axiome* dar. Diese sind allerdings nicht vollständig.
- Das berühmte *Unvollständigkeitstheorem* von Kurt GÖDEL zeigt im Übrigen, dass *keine* Axiomatisierung der Arithmetik im Rahmen von PL1 vollständig ist.

43

## ÜBUNGEN

---

- Bitte bis zur nächsten Vorlesung vorbereiten: **Kapitel 13** (*Formale Beweise und Quantoren*)!
- Bis zum Tutorium bitte folgende Aufgaben auf Papier lösen und beim Tutor abgeben: 12.4, 12.9, 12.17, 12.18, 12.22, 12.23, 12.30, 12.31
- Falls Sie über die Software verfügen, sollten Sie (optional!) auch die „Sie sind dran“-Abschnitte bearbeiten!

44



**VORLESUNG 12**

- Formale Beweise und Quantoren: Regeln für den Allquantor 3
- Regeln für den Existenzquantor 9
- Strategie und Taktik 16
- Korrektheit und Vollständigkeit 24
- Besprechung der Probeklausur 27
- Übungen 48

**FORMALE BEWEISE & QUANTOREN: REGELN FÜR DEN ALLQUANTOR**

- Den informellen Beweisregeln entsprechen auch formale Regeln im Rahmen des deduktiven Systems  $\mathcal{F}$ . Hinsichtlich  $\mathcal{F}$  ist zu beachten, dass in Beweisen von  $\mathcal{F}$  nur Sätze auftreten und keine Wffs mit freien Variablen (wie es in manchen anderen deduktiven Systemen der Fall ist).

- Der informellen Regel der Allbeseitigung entspricht in  $\mathcal{F}$  die **Allquantor-Beseitigung** ( $\forall$  Elim):
 
$$\begin{array}{l} \forall x S(x) \\ \vdots \\ \triangleright S(c) \end{array}$$
- $c$  ist dabei irgendeine Konstante,  $x$  irgendeine Variable und  $S(c)$  resultiert aus  $S(x)$  durch die Ersetzung aller freien  $x$  durch  $c$ .

- Der **generelle konditionale Beweis** ( $\forall$  Intro):
 
$$\begin{array}{l} \boxed{c} \\ \vdots \\ Q(c) \end{array}$$

$$\triangleright \forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$$
- Mit dem Rahmen um die Konstante  $c$  soll dabei ausgedrückt werden, dass  $c$  ein beliebiges Ding bezeichnen soll (das die Bedingung  $P(c)$  erfüllt). Die Konstante  $c$  darf daher nicht außerhalb des Unterbeweises auftauchen.

- Ein spezieller Fall eines generellen konditionalen Beweises ist die **Allquantor-Einführung** ( $\forall$  Intro). Sie entspricht der informellen Regel der universellen Generalisierung
 
$$\begin{array}{l} \boxed{c} \\ \vdots \\ P(c) \end{array}$$

$$\triangleright \forall x P(x)$$
- Auch hier darf die Konstante  $c$  nicht außerhalb des Unterbeweises auftauchen.

- Zur Rechtfertigung des generellen konditionalen Beweises sowie der Allquantor-Einführung wird stets der gesamte Unterbeweis angeführt.
- Beispiel:*

$$\frac{\frac{\frac{\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))}{\forall z (Q(z) \rightarrow R(z))}}{\forall x (P(x) \rightarrow R(x))}}$$

- 1.  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
  2.  $\forall z (Q(z) \rightarrow R(z))$
  3.  $\boxed{c} P(c)$
  4.  $P(c) \rightarrow Q(c)$        $\forall$  **Elim**: 1
  5.  $Q(c)$        $\rightarrow$  **Elim**: 3, 4
  6.  $Q(c) \rightarrow R(c)$        $\forall$  **Elim**: 2
  7.  $R(c)$        $\rightarrow$  **Elim**: 5, 6
  8.  $\forall x (P(x) \rightarrow R(x))$        $\forall$  **Intro**: 3–7

### REGELN FÜR DEN EXISTENZQUANTOR

- Der informellen Regel der Existenz Einführung entspricht in  $\mathcal{F}$  die **Existenzquantor-Einführung** ( $\exists$  **Intro**):
 
$$\frac{\begin{array}{l} S(c) \\ \vdots \end{array}}{\triangleright \exists x S(x)}$$

- Dabei steht  $x$  für irgendeine Variable,  $c$  für eine beliebige Konstante (oder einen komplexen Term ohne freie Variable).  $S(c)$  ergibt sich aus  $S(x)$  durch die Ersetzung aller freien Vorkommnisse von  $x$  durch  $c$ . Es kann in  $S(x)$  aber auch noch weitere Vorkommen von  $c$  geben (so dass man etwa von  $R(c, c)$  auf  $\exists x R(x, c)$  schließen kann).

- Der informellen Regel der existenziellen Instanziation entspricht in  $\mathcal{F}$  die **Existenzquantor-Beseitigung** ( $\exists$  **Elim**):
 
$$\frac{\begin{array}{l} \exists x P(x) \\ \vdots \\ \boxed{c} P(c) \\ \vdots \\ Q \end{array}}{\triangleright Q}$$
- Wieder darf  $c$  nicht außerhalb des Unterbeweises auftauchen, insbesondere nicht in  $Q$ !

- Während  $\forall$  **Elim** Ähnlichkeiten zu  $\wedge$  **Elim** besitzt, ähnelt  $\exists$  **Elim** der Regel  $\vee$  **Elim**. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass eine Allaussage eine Art lange Konjunktion, eine Existenzbehauptung hingegen eine Art lange Disjunktion darstellt.

1. $\forall x [Cube(x) \rightarrow Large(x)]$	
2. $\forall x [Large(x) \rightarrow LeftOf(x, b)]$	
3. $\exists x Cube(x)$	
4. $\boxed{\exists}$ Cube(e)	
5. Cube(e) $\rightarrow$ Large(e)	$\forall$ <b>Elim</b> : 1
6. Large(e)	$\rightarrow$ <b>Elim</b> : 5, 4
7. Large(e) $\rightarrow$ LeftOf(e, b)	$\forall$ <b>Elim</b> : 2
8. LeftOf(e, b)	$\rightarrow$ <b>Elim</b> : 7, 6
9. Large(e) $\wedge$ LeftOf(e, b)	$\wedge$ <b>Intro</b> : 6, 8
10. $\exists x (Large(x) \wedge LeftOf(x, b))$	$\exists$ <b>Intro</b> : 9
11. $\exists x (Large(x) \wedge LeftOf(x, b))$	$\exists$ <b>Elim</b> : 3, 4–10

- Wie im Falle der informellen Schlussmethoden sollen die bei den formalen Schlussregeln formulierten Einschränkungen Fehlschlüsse (wie etwa von  $\exists x S(x)$  auf  $\forall x S(x)$ ) verhindern. Der folgende *inkorrekte* ‚Beweis‘ zeigt, weshalb die Einschränkungen wichtig sind:

1. $\forall x \exists y SameCol(x, y)$	
2. $\boxed{\exists}$	
3. $\exists y SameCol(c, y)$	$\forall$ <b>Elim</b> : 1
4. $\boxed{\exists}$ SameCol(c, e)	
5. SameCol(c, e)	<b>Reit</b> : 4
6. SameCol(c, e)	<b>?? <math>\exists</math> Elim</b> : 3, 4–5
7. $\forall x SameCol(x, e)$	$\forall$ <b>Intro</b> : 2–6
8. $\exists y \forall x SameCol(x, y)$	$\exists$ <b>Intro</b> : 7

### STRATEGIE UND TAKTIK

- Achten Sie stets auf die Bedeutung der Sätze, mit denen Sie umgehen.
- Zur Auffindung eines formalen Beweises ist es stets ratsam, zunächst einen informellen Beweis zu suchen.
- Insbesondere beim Beweis von Allaussagen der Form  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$  bietet es sich an, rückwärts vorzugehen.

- Im Falle von Existenzaussagen  $\exists x S(x)$  hilft rückwärts zu arbeiten in der Regel wenig, es sei denn Sie sehen, wie eine Instanz  $S(c)$  der Aussage aus den Prämissen hergeleitet werden kann.
- Wenn Sie nicht weiter wissen, ist es vielleicht hilfreich, einen Beweis durch Widerspruch auszuprobieren.

- Überführt man einen informellen Beweis in einen formalen, ist zu beachten, dass in informellen Beweisen oft einfache Schritte wie  $\exists$  **Intro** ausgelassen werden, da sie auf der Hand liegen.
- In informellen Beweisen deuten bestimmte Formulierungen oftmals darauf hin, welche formalen Schritte den informellen entsprechen. Bezieht man sich etwa mit einem Pronomen auf ein Objekt, dessen Existenz bereits bewiesen wurde, deutet dies auf  $\exists$  **Elim** hin.

- *Beispiel:*  

$$\begin{array}{|l} \hline \neg \forall x P(x) \\ \hline \exists x \neg P(x) \end{array}$$
- *Informeller Beweis:*
- Da ein direkter Beweis in diesem Falle nicht sehr aussichtsreich ist, wenn man sich die Bedeutungen der Sätze vor Augen führt, versucht man es indirekt und nimmt  $\neg \exists x \neg P(x)$  an.

19

- Ein Widerspruch zur Annahme ergäbe sich, wenn man  $\forall x P(x)$  zeigen könnte. Um dies zu zeigen, wählt man ein beliebiges Ding  $c$ , für das man  $P(c)$  zeigen muss.
- Wie zeigt man nun, dass  $P(c)$  gilt? Am besten indirekt: Wäre  $\neg P(c)$  der Fall, wäre auch  $\exists x \neg P(x)$  wahr, was der Annahme unseres indirekten Beweises widerspricht.
- Also gilt  $P(c)$  und somit  $\forall x P(x)$ , was unserer Prämisse widerspricht. Also gilt  $\exists x \neg P(x)$ , was zu beweisen war.

20

- *Beispiel:*

$$\begin{array}{|l} \hline 1. \neg \forall x P(x) \\ \quad \vdots \\ 2. \exists x \neg P(x) \\ \hline \end{array}$$
  

$$\begin{array}{|l} \hline 1. \neg \forall x P(x) \\ \quad | 2. \neg \exists x \neg P(x) \\ \quad \quad \vdots \\ \quad \quad 4. \perp \\ 5. \exists x \neg P(x) \quad \quad \neg \text{Intro: } 2-4 \end{array}$$

21

$$\begin{array}{|l} \hline 1. \neg \forall x P(x) \\ \quad | 2. \neg \exists x \neg P(x) \\ \quad \quad | 3. \boxed{c} \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad 5. P(c) \\ \quad \quad 6. \forall x P(x) \quad \quad \forall \text{Intro: } 3-5 \\ \quad \quad 7. \perp \quad \quad \perp \text{Intro: } 6, 1 \\ 8. \exists x \neg P(x) \quad \quad \neg \text{Intro: } 2-7 \end{array}$$

22

$$\begin{array}{|l} \hline 1. \neg \forall x P(x) \\ \quad | 2. \neg \exists x \neg P(x) \\ \quad \quad | 3. \boxed{c} \\ \quad \quad \quad | 4. \neg P(c) \\ \quad \quad \quad \quad 5. \exists x \neg P(x) \quad \quad \exists \text{Intro: } 4 \\ \quad \quad \quad \quad 6. \perp \quad \quad \perp \text{Intro: } 5, 2 \\ \quad \quad \quad 7. \neg \neg P(c) \quad \quad \neg \text{Intro: } 4-6 \\ \quad \quad \quad 8. P(c) \quad \quad \neg \text{Elim: } 7 \\ \quad \quad 9. \forall x P(x) \quad \quad \forall \text{Intro: } 3-8 \\ \quad \quad 10. \perp \quad \quad \perp \text{Intro: } 9, 1 \\ 11. \exists x \neg P(x) \quad \quad \neg \text{Intro: } 2-10 \end{array}$$

23

### KORREKTHEIT UND VOLLSTÄNDIGKEIT

---

- Entsprechend dem aussagenlogischen Fall soll  $P_1, \dots, P_n \vdash S$  besagen, dass es einen PL1-Beweis von  $S$  ausgehend von den Prämissen  $P_1, \dots, P_n$  gibt (also einen Beweis, der die Regeln für  $\forall, \exists, =, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$  und  $\perp$  verwendet).

24



- Wie im Falle des aussagenlogischen Systems  $\mathcal{F}_T$  sind auch zwei wichtige Eigenschaften des Systems  $\mathcal{F}$  seine *Korrektheit* sowie seine *Vollständigkeit*.
- Zum einen ist  $\mathcal{F}$  *korrekt*; d.h.:
- Wenn  $P_1, \dots, P_n \vdash S$  gilt, dann ist S eine PL1-Folgerung aus  $P_1, \dots, P_n$ .
- Insbesondere gilt: Wenn  $\vdash S$ , dann ist S eine PL1-Wahrheit.

25

- Zum anderen ist  $\mathcal{F}$  *vollständig*; d.h.:
- Wenn S eine PL1-Folgerung aus  $P_1, \dots, P_n$  ist, dann gilt auch  $P_1, \dots, P_n \vdash S$ .
- Insbesondere gilt: Wenn S eine PL1-Wahrheit ist, dann gilt auch  $\vdash S$ .

26

### BESPRECHUNG DER PROBEKLAUSUR

---

- **Aufgabe 1.** Übersetzen Sie die folgenden Sätze in die Klötzchensprache!
- 1. Entweder ist a ein Würfel oder ein Tetraeder.  
 $\neg(\text{Cube}(a) \leftrightarrow \text{Tet}(a))$

27

- 2. Wenn a nicht sowohl ein Würfel als auch klein ist, hat es nicht dieselbe Form wie b.  
 $\neg(\text{Cube}(a) \wedge \text{Small}(a)) \rightarrow \neg \text{SameShape}(a, b)$
- 3. a besitzt nur dann dieselbe Form wie b, falls es weder ein Würfel noch groß ist.  
 $\text{SameShape}(a, b) \rightarrow \neg(\text{Cube}(a) \vee \text{Large}(a))$

28

- **Aufgabe 2.1** Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, ob die folgende Behauptung zutrifft:  $\neg Q$  folgt tautologisch aus  $P \vee Q$  und  $P$ .

P	Q	$(P \vee Q)$	$\wedge P$	$\rightarrow$	$\neg Q$
W	W	W	W	F	F
W	F	W	W	W	W
F	W	W	F	W	F
F	F	F	F	W	W

- Die Behauptung trifft *nicht* zu.

29

- **Aufgabe 2.3** Stellen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln fest, ob die folgende Behauptung zutrifft:  $\neg(P \leftrightarrow Q)$  und  $\neg P \leftrightarrow Q$  sind tautologisch äquivalent.

P	Q	$\neg(P \leftrightarrow Q)$	$(\neg P \leftrightarrow Q)$
W	W	F	F
W	F	W	W
F	W	W	W
F	F	F	F

- Die Behauptung trifft zu.

30

- **Aufgabe 3.1** Aufgrund von  $P \rightarrow R$  und  $Q \rightarrow R$  kann  $(P \vee Q) \rightarrow R$  hergeleitet werden.
- |    |                            |                                 |
|----|----------------------------|---------------------------------|
| 1. | $P \rightarrow R$          |                                 |
| 2. | $Q \rightarrow R$          |                                 |
| 3. | $P \vee Q$                 |                                 |
| 4. | $P$                        |                                 |
| 5. | $R$                        | $\rightarrow$ <b>Elim:</b> 1, 4 |
| 6. | $Q$                        |                                 |
| 7. | $R$                        | $\rightarrow$ <b>Elim:</b> 2, 6 |
| 8. | $R$                        | $\vee$ <b>Elim:</b> 3, 4–5, 6–7 |
| 9. | $(P \vee Q) \rightarrow R$ | $\rightarrow$ <b>Intro:</b> 3–8 |

31

- **Aufgabe 3.2** Ausgehend von  $P \rightarrow (Q \wedge \neg Q)$  kann  $\neg P$  hergeleitet werden.
- |    |                                   |                                 |
|----|-----------------------------------|---------------------------------|
| 1. | $P \rightarrow (Q \wedge \neg Q)$ |                                 |
| 2. | $P$                               |                                 |
| 3. | $Q \wedge \neg Q$                 | $\rightarrow$ <b>Elim:</b> 1, 2 |
| 4. | $\perp$                           | $\perp$ <b>Intro:</b> 3, 3      |
| 5. | $\neg P$                          | $\neg$ <b>Intro:</b> 2–4        |

32

- **Aufgabe 3.3** Ausgehend von  $P \rightarrow Q$  kann  $\neg Q \rightarrow \neg P$  hergeleitet werden.
- |    |                             |                                 |
|----|-----------------------------|---------------------------------|
| 1. | $P \rightarrow Q$           |                                 |
| 2. | $\neg Q$                    |                                 |
| 3. | $P$                         |                                 |
| 4. | $Q$                         | $\rightarrow$ <b>Elim:</b> 1, 3 |
| 5. | $\perp$                     | $\perp$ <b>Intro:</b> 2, 4      |
| 6. | $\neg P$                    | $\neg$ <b>Intro:</b> 3–5        |
| 7. | $\neg Q \rightarrow \neg P$ | $\rightarrow$ <b>Intro:</b> 2–6 |

33

- **Aufgabe 4.** Übersetzen Sie die folgenden Sätze in die Klötzchensprache!
- 1. Alle Würfel sind klein.  
 $\forall x (\text{Cube}(x) \rightarrow \text{Small}(x))$
- 2. Alle Objekte sind kleine Würfel.  
 $\forall x (\text{Cube}(x) \wedge \text{Small}(x))$
- 3. Einige kleinen Objekte sind keine Würfel.  
 $\exists x (\text{Small}(x) \wedge \neg \text{Cube}(x))$

34

- **Aufgabe 5.** Im Folgenden besage  $G(x)$  so viel wie  $x$  ist ein *Gemälde*,  $K(x)$  so viel wie  $x$  ist ein *Kunstliebhaber*,  $B(x, y)$  so viel wie  $x$  *bewundert*  $y$  und  $R(x, y)$  so viel wie  $x$  ist *berühmter als*  $y$ .  $a$  bezeichne die *Mona Lisa* (das Gemälde; kurz: M.L.). Der Gegenstandsbereich sei die Menge aller Personen und Gemälde. Was besagen die folgenden Sätze umgangssprachlich?

35

- 1.  $\forall x (K(x) \rightarrow B(x, a))$   
Alle Kunstliebhaber bewundern die M.L..
- 2.  $\neg \exists y (G(y) \wedge R(y, a))$   
Kein Gemälde ist berühmter als die M.L..
- 3.  $\forall y ((G(y) \wedge y \neq a) \rightarrow R(a, y))$   
Die M.L. ist berühmter als alle anderen Gemälde.
- 4.  $\exists x \forall y (G(x) \wedge (K(y) \rightarrow B(y, x)))$   
Ein Gemälde wird von allen Kunstliebhabern bewundert.

36

- **Aufgabe 6.1** Leiten Sie  $\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$  ausgehend von  $\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$  her.
- |  |                                  |
|--|----------------------------------|
| 1. $\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$         |                                  |
| 2. $\forall x A(x)$                            |                                  |
| 3. $\boxed{c}$                                 |                                  |
| 4. $A(c)$                                      | $\forall$ <b>Elim</b> : 2        |
| 5. $A(c) \rightarrow B(c)$                     | $\forall$ <b>Elim</b> : 1        |
| 6. $B(c)$                                      | $\rightarrow$ <b>Elim</b> : 4, 5 |
| 7. $\forall x B(x)$                            | $\forall$ <b>Intro</b> : 3–6     |
| 8. $\forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$ | $\rightarrow$ <b>Intro</b> : 2–7 |

37

- **Aufgabe 6.3** Leiten Sie  $\forall x A(x) \rightarrow \neg \exists x \neg A(x)$  ohne Annahmen her.
- |  |                                  |
|--|----------------------------------|
| 1. $\forall x A(x)$                                      |                                  |
| 2. $\exists x \neg A(x)$                                 |                                  |
| 3. $\boxed{c} \neg A(c)$                                 |                                  |
| 4. $A(c)$  | $\forall$ <b>Elim</b> : 1        |
| 5. $\perp$   | $\perp$ <b>Intro</b> : 3, 4      |
| 6. $\perp$   | $\exists$ <b>Elim</b> : 2, 3–5   |
| 7. $\neg \exists x \neg A(x)$                            | $\neg$ <b>Intro</b> : 2–6        |
| 8. $\forall x A(x) \rightarrow \neg \exists x \neg A(x)$ | $\rightarrow$ <b>Intro</b> : 1–7 |

38

- **Aufgabe 7.** Zeigen Sie mit Hilfe formaler Beweise, dass die folgenden Behauptungen zutreffen, oder widerlegen Sie sie mit einem Gegenbeispiel!
- 1. Aus  $\forall x (Cube(x) \rightarrow Small(x))$  folgt  $\forall x (Cube(x) \wedge Small(x))$ .  
Die vermeintliche Konklusion ist etwa falsch in allen Klötzchenwelten, in denen es zwar nur kleine Würfel, aber auch einen Tetraeder gibt. In dieser Welt ist die Prämisse aber wahr, so dass *keine* Folgerungsbeziehung vorliegt.

39

- 2. Aus  $\forall x \exists y SameShape(x, y)$  folgt  $\exists y \forall x SameShape(x, y)$ .  
Die Prämisse ist etwa wahr in einer Klötzchenwelt, in der es zwei Würfel sowie zwei Tetraeder gibt. Dort ist die vermeintliche Konklusion aber falsch, da es Objekte mit unterschiedlichen Formen gibt. Es liegt also wiederum *keine* Folgerungsbeziehung vor.

40

- **Aufgabe 8.** Überprüfen Sie das folgende Argument auf Gültigkeit, indem Sie es in eine PL1-Sprache übersetzen und dann einen entsprechenden Beweis führen oder ein Gegenbeispiel angeben! (*Hinweis*: Verwenden Sie u. a. Prädikate, welche die Eigenschaften  $x$  *besitzt einen Schlüssel* und  $x$  *hat die Unterlagen gestohlen* ausdrücken.)

41

- Jemand, der einen Schlüssel besitzt, hat die Unterlagen gestohlen. Nur Kassierer oder Wachmänner besitzen Schlüssel. Also hat ein Kassierer oder ein Wachmann die Unterlagen gestohlen.
- Gegenstandsbereich sei die Menge aller Menschen.  
 $S(x)$  besage:  $x$  *besitzt einen Schlüssel*;  
 $U(x)$  besage:  $x$  *hat die Unterlagen gestohlen*;  
 $K(x)$  besage:  $x$  *ist ein Kassierer*;  
 $W(x)$  besage:  $x$  *ist ein Wachmann*.

42

- Jemand, der einen Schlüssel besitzt, hat die Unterlagen gestohlen. Nur Kassierer oder Wachmänner besitzen Schlüssel. Also hat ein Kassierer oder ein Wachmann die Unterlagen gestohlen.
- $$\begin{array}{|l} \exists x (S(x) \wedge U(x)) \\ \forall x (S(x) \rightarrow (K(x) \vee W(x))) \\ \hline \exists x ((K(x) \vee W(x)) \wedge U(x)) \end{array}$$

43

- $$\begin{array}{|l} 1. \exists x (S(x) \wedge U(x)) \\ 2. \forall x (S(x) \rightarrow (K(x) \vee W(x))) \\ \hline 3. \boxed{c} S(c) \wedge U(c) \\ 4. S(c) \qquad \qquad \qquad \wedge \text{Elim: } 3 \\ 5. S(c) \rightarrow (K(c) \vee W(c)) \qquad \qquad \qquad \vee \text{Elim: } 2 \\ 6. K(c) \vee W(c) \qquad \qquad \qquad \rightarrow \text{Elim: } 4, 5 \\ 7. U(c) \qquad \qquad \qquad \wedge \text{Elim: } 3 \\ 8. (K(c) \vee W(c)) \wedge U(c) \qquad \qquad \qquad \wedge \text{Intro: } 6, 7 \\ 9. \exists x ((K(x) \vee W(x)) \wedge U(x)) \qquad \qquad \qquad \exists \text{Intro: } 8 \\ 10. \exists x ((K(x) \vee W(x)) \wedge U(x)) \qquad \qquad \qquad \exists \text{Elim: } 1, 3-9 \end{array}$$

44

- **Aufgabe 9.** Geben Sie für jedes der folgenden Argumente an, ob es sich um eine tautologische, analytische oder eine PL1-Folgerung handelt. Geben Sie im Falle einer analytischen Folgerung eine mit den Ausgangsprämissen konsistente Zusatzprämisse an, so dass die Konklusion des Arguments eine PL1-Folgerung aus den Ausgangsprämissen und der Zusatzprämisse ist!

45

- 1. 
$$\begin{array}{|l} \neg \forall x A(x) \rightarrow \exists x \neg A(x) \\ \neg \exists x \neg A(x) \\ \hline \forall x A(x) \end{array}$$
- Bei dem Argument handelt es sich um eine *tautologische* Folgerung.

46

- 2. 
$$\begin{array}{|l} \text{Smaller}(a, b) \\ \text{Smaller}(b, c) \\ \hline \text{Smaller}(a, c) \end{array}$$
- Bei dem Argument handelt es sich um eine *analytische* Folgerung. Nimmt man als Zusatzprämisse  $\forall x \forall y \forall z ((\text{Smaller}(x, y) \wedge \text{Smaller}(y, z)) \rightarrow \text{Smaller}(x, z))$  hinzu, ist die Konklusion eine PL1-Folgerung aus Zusatz- und Ausgangsprämissen.

47

### ÜBUNGEN

---

- Nächste Woche: **Abschlussklausur!** (4.2., 14–16 Uhr, HS 12) Bitte geben Sie auf dem Klausurbogen deutlich(!) Ihren Namen sowie Ihre Matrikelnummer an!
- Bis zum Tutorium bitte folgende Aufgaben auf Papier lösen und beim Tutor abgeben: 13.4, 13.5, 13.16, 13.25, 13.26, 13.44, 13.45, 13.49
- Falls Sie über die Software verfügen, sollten Sie (optional!) auch die „Sie sind dran“-Abschnitte bearbeiten!

48